Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный аграрный университет имени П.А.Столыпина»

Тарский филиал
Отделение среднего профессионального образования

ППССЗ по специальности 21.02.19 Землеустройство

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по освоению учебной дисциплины
ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Обеспечивающее преподавание дисциплины подразделение – отделение среднего профессионального образования	
Разработчик: преподаватель отделения СПО	Гринева Л.П.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Настоящее издание является основным организационно-методическим документом учебно-методического комплекса по дисциплине в составе программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ). Оно предназначено стать для них методической основой по освоению данной дисциплины.

2. Содержательной основой для разработки настоящего издания послужила Рабочая программа учебной дисциплины, утвержденная в установленном порядке.

3. Методические аспекты настоящего издания развиты в учебно-методической литературе и других разработках, входящих в состав УМК по данной дисциплине.

4. Доступ обучающихся к электронной версии Методических указаний по изучению дисциплины, обеспечен в информационно-образовательной среде университета.

При этом в электронную версию могут быть внесены текущие изменения и дополнения, направленные на повышение качества настоящих методических указаний до их переиздания в установленном порядке.

Уважаемые обучающиеся!

Приступая к изучению новой для Вас учебной дисциплины, начните с вдумчивого прочтения разработанных для Вас специальных методических указаний. Это поможет Вам вовремя понять и правильно оценить ее роль в Вашем образовании.

Ознакомившись с организационными требованиями отделения среднего профессионального образования по этой дисциплине и соизмерив с ними свои силы, Вы сможете сделать осознанный выбор собственной тактики и стратегии учебной деятельности, уберечь самих себя от неразумных решений по отношению к ней в начале семестра, а не тогда, когда уже станет поздно. Используя это издание, Вы без дополнительных осложнений подойдете к семестровой аттестации по этой дисциплине. Успешность аттестации зависит, прежде всего, от Вас. Ее залог – ритмичная, целенаправленная, вдумчивая учебная работа, в целях обеспечения которой и разработаны эти методические указания.

1. Материалы по теоретической части дисциплины

1.1. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет ресурсов, дополнительной литературы, справочные и дополнительные материалы по дисциплине

Основные печатные издания

Печатных изданий нет

3.2.2. Основные электронные издания

1. Дадаян А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 544 с. — ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1891827 – Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Бардушкин В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. — 304 с. — ISBN978-5-906923-05-9. - Текст : электронный. - URL:https://znanium.com/catalog/product/1235904. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Бардушкин В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — Москва: КУРС, ИНФРА-М, 2022. — 368 с. — ISBN978-5-906923-34-9. - Текст : электронный. - URL:https://znanium.com/catalog/product/1817031. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.2.3. Дополнительные источники

1. Дадаян А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие /Дадаян А. А. - 3-е изд. - Москва: Форум, ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1362444 – Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Гусева А. И. Дискретная математика: учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. — Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2022. — 208 с. — ISBN978-5-906818-21-8. - Текст: электронный. - URL:https://znanium.com/catalog/product/1796823. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Гусева А. И. Дискретная математика: сборник задач / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. — Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. — 224 с. — ISBN978-5-906818-72-0. - Текст: электронный. - URL:https://znanium.com/catalog/product/1094740. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Среднее профессиональное образование: теоретический и научно-методический журнал / Министерство образования и науки Российской Федерации. - Москва. - ISSN 1990-679. – Текст: непосредственный.

1.2. Тематический план теоретического обучения

№ п/п	Наименование разделов, тем и содержание учебного материала
1	**2**
Введение	Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении программы подготовки специалистов среднего звена
Раздел 1. Математический анализ	
Тема 1.1	**Производная и её приложение**
	Содержание учебного материала
	Определение производной. Теоремы дифференцирования. Производные элементарных функций. Механический смысл второй производной. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Общая схема исследования функции
Тема 1.2	**Дифференциальное исчисление**
	Содержание учебного материала
	Геометрический смысл производной. Дифференциал функции. Таблица дифференциалов. Применение дифференциала для приближенных вычислений. Параметрическое задание функции и её дифференцирование. Свойства дифференцируемых функций.
Тема 1.3.	**Интегральное исчисление**
	Содержание учебного материала
	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегрирование тригонометрических выражений. Понятие определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Приближенное вычисление определенного интеграла.
Раздел 2. Основы дискретной математики	
Тема 2.1	**Введение в теорию множеств**

	Содержание учебного материала
	Понятие множества и способы его задания. Подмножества. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Упорядоченные множества. Прямое произведение множеств.
Тема 2.2	**Введение в теорию графов**
	Содержание учебного материала
	Основные понятия. Способы задания графов. Части графов. Операции на графах. Связность в графах и деревья.
Раздел 3. Элементы линейной алгебры	
Тема 3.1	**Основные сведения о матрицах**
	Содержание учебного материала
	Определение матрицы. Действия над матрицами и векторами. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Обратная матрица. Обращение матриц второго и третьего порядков.
Тема 3.2	**Решение систем линейных уравнений**
	Содержание учебного материала
	Решение простейших матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
	Раздел 4. Основы теории комплексных чисел
Тема 4.1	**Основы теории комплексных чисел**
	Содержание учебного материала
	Определение комплексного числа. Действия над комплексными числами. Полярные координаты точки на плоскости.
Раздел 5. Элементы теории вероятностей и математической статистики	
Тема 5.1	**Основные понятия теории вероятностей**
	Содержание учебного материала
	Основные понятия комбинаторики. Основные понятия теории вероятностей. Операции над событиями. Случайные величины. Математическое ожидание.
Тема 5.2	**Элементы математической статистики**
	Содержание учебного материала
	Понятие о задачах математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Оценка параметров генеральной совокупности по её выборке. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Проверка статистических гипотез. Линейная корреляция.

2. Материалы по практическим занятиям

2.1. Практические занятия по курсу и подготовка обучающегося к ним

В ходе практических занятий, как одной из форм систематических учебных занятий, обучающиеся приобретают необходимые умения и навыки по тому или иному разделу дисциплины «Математические методы решения прикладных профессиональных задач».

Общие цели практического занятия сводятся к закреплению теоретических знаний, более глубокому освоению уже имеющихся у обучающихся умений и навыков и приобретению новых умений и навыков, необходимых им для осуществления своей профессиональной деятельности и составляющих квалификационные требования к специалисту.

Основными задачами практических занятий являются:

- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности обучающихся во время выполнения ими практических заданий.

Примерные практические задания для успешного освоения разделов учебной дисциплины, которые рекомендовано изучить и выполнить необходимые действия соответственно методическим указаниям и рекомендациям.

РАЗДЕЛ. Математический анализ

Производная и её приложения

Производная функции. Производные основных элементарных функций. Производные сложной и обратной функций. Производные логарифмических функций. Производные показательных функций. Производные тригонометрических функций. Исследование функции с помощью производной. Основные формулы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование методом замены переменной. Определенный интеграл и его непосредственное вычисление. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной. Вычисление площади плоской фигуры.

Практические работы: *Нахождение производных функций. Исследование функции с помощью производной и построение графиков функции. Вычисление неопределенных интегралов. Вычисление определенного интеграла*.

Методические указания

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Перед тем как записать понятие производной рекомендуется рассмотреть физическую задачу о неравномерном движении и его скорости, которая приводит к понятию производной.

Производной функции f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю, т.е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием функции.**

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции f(x) в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику данной функции в его точке с абсциссой x_0, т.е. f '(x_0)=k=tgα. в этом заключается **геометрический смысл производной**.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки в любой момент времени t есть производная от пути s по времени t:

V(t)=s'(t)= $\frac{ds}{dt}$, в этом заключается механический смысл производной.

Ускорение a(t) прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени, т.е. a(t)= v'(t)= $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если у функции u(x) и v(x) существуют производные, то

1. (u+v)′ = u′+v′
2. (cu)′ = c u′
3. (uv)′ = u′v+uv′
4. (u/v)′=(u′v-v′u)/v² (v $\neq 0$)

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция	**Производная**
f(x) = c	$c' = 0$, c - const
f(x) = x^α	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
f(x) = e^x	$(e^x)' = e^x$
f(x) = a^x	$(a^x)' = a^x \ln a$
f(x) = ln x	(ln x)′ = $\frac{1}{x}$
f(x) = $\log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
f(x) = sin x	(sin x)′ = cos x
f(x) = cos x	(cos x)′ = - sin x
f(x) = tg x	(tg x)′ = $\frac{1}{\cos^2 x}$
f(x) = ctg x	(ctg x)′ = - $\frac{1}{\sin^2 x}$
f(x) = arcsin x	(arcsin x)′ = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f(x) = arccos x	(arccos x)′ = - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f(x) = arctg x f(x) = arcctg x	(arctg x) $'$ = $\frac{1}{1+x^2}$ (arcctg x) $'$ = - $\frac{1}{1+x^2}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если y = f(g(x)) и существуют производные f'_g и g'_x, то $y'_x = f'_g \cdot g'_x$, где индексы g и x указывают, по какому аргументу вычисляются производные.

Примеры: 1. $(3x^4)' = 3\cdot 4x^3 = 12x^3$

2. $(5x^2+8x-10)'=(5x^2)'+(8x)'-10'=5\cdot 2x+8-0=10x+8$

3. $((x^2-x)(5x-8))'= (x^2-x)'\cdot(5x-8) + (x^2-x)\cdot(5x-8)'=(2x-1)(5x-8)+(x^2-x)5= 10x^2- 21x+8+5x^2-5x= =15x^2-26x+8$

4. $\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2+1)-x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$

5. (sin(2x+1))’=sin’(2x+1) (2x+1)= 2cos(2x+1)

6. $\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}(\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (sin x >0)

7. $(e^{3x})' = e^{3x}\,(3x)' = 3e^{3x}$

8. $(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$ (sin x >0)

9. $(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\,(x\ln x)' = e^{x\ln x}\,(\ln x + 1)$ (x>0)

10 $(2\,ln(x^2-2x))' = 2(ln\,(x^2-2x))'=2\frac{1}{x^2-2x}(x^2-2x)'= \frac{2(2x-2)}{x^2-2x} = \frac{4x-2}{x^2-2x}$

Задания практической работы

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции.
2. Напишите все формулы дифференцирования.
3. Дайте определение сложной функции. Как найти ее производную?.

Найдите производные функций:

$y=\sin(7x-1)$	$y=\cos(4x+5)$
$y=(6x-5)^4$	$y=(0,5x^7+3)^6$
$y=\sin 5x+tg3x$	$y=\cos x^4$
$y=\cos^4 x$	$y=\ln(\cos x+6x)$
$y=\ln(2x^3+7)$	$y=e^{5x+3}$
$y=\ln^3(2x+5)$	$y=2^{\sin x}+x^2$
$y=(4x-1)^{10}$	$y=\sin^3 x$
$y=(8x+3)^5$	$y=(3x^7+5x^2-8)^9$
$y=6\sin 3x$	$y=arctgx^3$

Тема. Правила дифференцирования.

Цель: провести диагностику усвоения системы знаний и умений выполнять задания

Задачи: выявить уровень усвоения знаний учащимися.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение контрольной работы по математике дается 90 минут. Работа состоит из 2 частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 10 заданий (А1 – А10) базового уровня по материалу раздела «Производная и ее применение» и оценивается в 2 балла.

Часть 2 содержит 2 более сложных заданий (В1, В2) по материалу раздела «Производная и ее применение» и оценивается в 5 баллов.

При выполнении всех заданий нужно записать полное решение и ответ. Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.
За каждый правильный ответ в зависимости от сложности задания даётся от одного до четырех баллов. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Вариант 1

А1. Найдите производную функции $y = 4x^3$.
1) $12x^2$ 2) $12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$

А2. Найдите производную функции $y = 6x - 11$.
1) *-5*2)*11* 3) *6*4) *6x*

А3. Найдите производную функции $y = \frac{x-1}{x}$.
1) $-\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{x-1}{x^2}$ 3) $\frac{2x+1}{x^2}$ 4) $\frac{1}{x^2}$

А4. Найдите производную функции $y = x \sin x$.
1) $\sin x - x\cos x$ 2) $\sin x + x\cos x$ 3) $\cos x$ 4) $x + x\cos x$

А5. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.
1) $\pi^2 - 1$ 2) $2\pi + 1$ 3) $2\pi - 1$ 4) 2π

А6. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ в точке x_o*=2.*
1)10 2) *12* 3) *8* 4) *6*

А7. Найдите производную функции $y = \sin(3x + 2)$.
1) $\cos(3x+2)$ 2) $-3\cos(3x+2)$ 3) $3\cos(3x+2)$ 4) $-\cos(3x+2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$ в точке x_o*= 4.*
1) *21* 2) *24* 3) *0* 4) *3,5*

А9. Вычислите значение производной функции $y = \frac{1}{2}tg(4x - \pi) + \frac{\pi}{4}$

вточке $x_0 = \frac{\pi}{4}$. 1) *2* 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) *4* 4) $\frac{\pi}{2}$

А10. Найдите производную функции $y = x^2 \cos x$.
1) $2x\sin x$ 2) $-2x\sin x$ 3) $2x\cos x + x^2\sin x$ 4) $2x\cos x - x^2\sin x$

В1. Вычислите значение производной функции $y = 14\sqrt{2x-3}$ в точке x_o*= 26.*

В2. Найдите значение *x,* при которых производная функции $y = \frac{x-2}{x^2}$ равна *0.*

Вариант 2

А1. Найдите производную функции $y = \frac{1}{3}x^6$.
1) $2x^6$ 2) $2x^5$ 3) $\frac{1}{3}x^5$ 4) $6x^5$

А2. Найдите производную функции $y = 12 - 5x$.

1) *7*2)*12* 3) *-5*4) *-5x*

А3. Найдите производную функции $y=\frac{x+3}{x}$.

1) $\frac{3}{x^2}$ 2) $\frac{2x-3}{x^2}$ 3) $-\frac{3}{x^2}$ 4) $-\frac{3}{x}$

А4. Найдите производную функции $y=x\cos x$.

1) $\cos x - x\sin x$ 2) $\cos x + x\sin x$ 3) $-\sin x$ 4) $x-\sin x$

А5. Найдите производную функции $y=x^2+\cos x \text{ в точке } x_0=\frac{\pi}{2}$.

1) π^2-1 2) $\pi+1$ 3) $\frac{\pi}{2}-1$ 4) $\pi-1$

А6. Вычислите значение производной функции $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3x$ в точке *x_o=2.*

1) *13* 2) *3* 3) *8* 4) *27*

А7. Найдите производную функции $y=\cos(5x-2)$.

1) $-2\sin(5x-2)$ 2) $-5\sin(5x-2)$ 3) $5\sin(5x-2)$ 4) $\sin(5x-2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y=\frac{3}{x}-\sqrt{x}$ в точке $x_0=\frac{1}{4}$.

1) *-47* 2) *-49* 3) *47* 4) *11,5*

А9. Вычислите значение производной функции $y=1+ctg(2x+\pi)$

вточке $x_0=-\frac{\pi}{4}$. 1) *2* 2) *-1* 3) *-2* 4) $-\frac{1}{2}$

А10. Найдите производную функции $y=x^2\sin x$.

1) $2x\cos x$ 2) $2x\sin x - x^2\cos x$ 3) $2x\sin x + x^2\cos x$ 4) $-2x\cos x$

В1. Вычислите значение производной функции $y=30\sqrt{4-3x}$ в точке *x_o= -7.*

В2. Найдите значение *x,* при которых производная функции $y=\frac{x+2}{x^2}$ равна *0.*

Ответы:

Вариант	А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	В1	В2
1	1	3	4	2	3	2	3	1	1	4	2	4
2	2	3	3	1	4	1	2	2	3	3	-9	-4

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	В1	В2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

«2»	«3»	«4»	«5»
0-10 б.	11-14 б.	15-17 б.	18-20 б.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Схема исследования функции с помощью производной:

1. Найти область определения функции;
2. Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной; периодической;
3. Выяснить координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
4. Найти производную;
5. Найти критические точки;

6. Найти промежутки возрастания и убывания;
7. Найти точки экстремума функции и вычислить значения функции в этих точках;
8. Построить график функции.

Пример: Исследовать функцию и построить график: $y = x\sqrt{1-x}$ **.**

1. Найдем область определения заданной функции: 1 – x ≥ 0, –x ≥ – 1, x ≤ 1.

2. Определим наличие асимптот.

а) вертикальных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x\to 1} x\sqrt{1-x} = 1\cdot\sqrt{1-1} = 0$.

б) горизонтальные или наклонные асимптоты определяются уравнением : $y = kx + b$.

Вычислим коэффициенты k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1-x} = -\infty$$

, следовательно, горизонтальные или наклонные асимптоты отсутствуют.

3. Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат и исследуем функцию на четность.

Если y = 0, то x = 1 или x = 0, то есть имеем (1,0), (0, 0) – точки пересечения с осями координат.

$$y(-x) = -x\sqrt{1-(-x)} = -x\sqrt{1+x} \neq y(x) \neq -y(x).$$

Проверим четность функции:

Значит, данная функция не является четной и не является нечетной, то имеем функцию общего вида.

4. Исследуем монотонность функции с помощью y' .

$$y' = \left(x\sqrt{1-x}\right)' = (x)'\cdot\sqrt{1-x} + x\cdot\left(\sqrt{1-x}\right)' = 1\cdot\sqrt{1-x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(1-x)' =$$

$$= \sqrt{1-x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left((1)' - (x)'\right) = \sqrt{1-x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(0-1) = \sqrt{1-x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) =$$

$$= \sqrt{1-x} - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\left(\sqrt{1-x}\right)^2 - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{2-2x-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

2 – 3 x = 0, – 3 x = - 2 , x = $^2/_3$,

$2\sqrt{1-x} \neq 0$ для всех x из области определения.

y'   +   -

y   ↗ $^2/_3$ ↘   1

x

$(\cdot)$ max

На тех интервал > 0 , функция возрастает. Поэтому интервал возрас функции: ($^2/_3$; 1) . В точке x = $^2/_3$ функция приним начение:

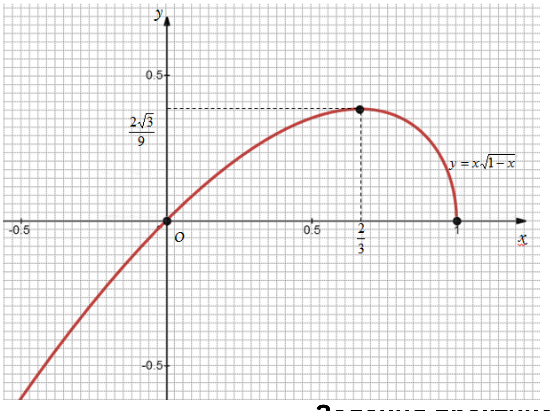
$$y_{\max}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

5. Строим график функции, отметив точку экстремума и точки пересечения с осями координат.

Уточним вид графика при помощи дополнительных точек:

$y(0) = 0\cdot\sqrt{1-0} = 0;$

$y(1) = 1\sqrt{1-1} = 0;$



Задания практической работы (по вариантам)

Определить промежутки монотонности функции (a, b) **по образцу,** исследовать функцию и построить график функции (c) **по схеме исследования.**

1. a) $y = (x-3)(x-2)$, b) $y = x^4 - 8x^2 - 9$, c) $y = {}^1/3\, x^3 - 2x^2 - 5$;
2. a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, b) $y = x^5 - x^3 + x + 2$, c) $y = 8x^3 - 4x^2 + 3$;
3. a) $y = (x^2 + x)(x-2)$, b) $y = {}^1/5\, x^5 - 4x^2$, c) $y = 6x^3 - 2x - 41$;
4. a) $y = x^5 - x^2 + 8$, b) $y = x^5 - x^3 + x + 2$, c) $y = -2x^3 + x - 4$;
5. a) $y = 3x^2 - 6x + 5$, b) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, c) $y = 3x^2 - 4x + 5$;
6. a) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$, b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, c) $y = 8x^3 - x^2 + 7x - 2$;
7. a) $y = x^4 - 10x^2 + 9$, b) $y = x^5 - x^3 + x + 2$, c) $y = -7x^3 + x^2 - 3x - 1$;
8. a) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3$, b) $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$, c) $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$;
9. a) $y = x^5 - x^2 + 8$, b) $y = x^3/3 + 2x^2 - 5x + 4$, c) $y = -5x^3 + 6x^2 - 3$;
10. a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, b) $y = x^5 - x^3 + x + 2$, c) $y = 8x^3 - 4x^2 + 3$;
11. a) $y = x^3 - 3x + 2$, b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, c) $y = 6x^3 - 8x + 21$;
12. a) $y = x(x^2 + 3x + 2)$, b) $y = x^4/4 - 2x^2 - {}^9/4$, c) $y = 2x^3 - 4x + 7$;

13 a) $y = {}^1/15\, x^3 - {}^9/20\, x^2 - {}^1/2\, x$, b) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, c) $y = 7x^3 - 2x^2 + 3x - 1$;
14 a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, b) $y = x^5 - x^3 + x + 2$, c) $y = 8x^3 - 4x^2 + 3$.

Тема. ИНТЕГРАЛЫ

Каждому математическому действию соответствует обратное ему действие. Для дифференцирования существует обратное действие – интегрирование. Нужно разобраться в определении первообразной для функции f(x), понять неоднозначность нахождения первообразной, а затем следует изучить определение неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла.

ПЕРВООБРАЗНАЯ

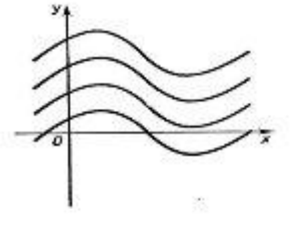
Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x) на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$**,** или, что то же самое, $dF(x) = f(x)dx.$

Пример. Первообразной для функции f(x) = x на всей числовой оси является $F(x) = x^2/2$, поскольку $(x^2/2)' = x$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Если F(x) – первообразная функции f(x), то и функция F(x) + C, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Графики всех первообразных одной и той же функции f(x будут получаться один из другого параллельным переносом вдоль оси Оу. И таких графиков будет бесконечно много.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Множество всех первообразных *F(x)+c* для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx.$

Таким образом, $\int f(x)dx.$ =F(x) + C, где C – произвольная постоянная.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$\int dx = x + C;$	$\int ctgx dx = -\ln\left|\sin x\right| + C$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\left|x\right| + C;$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
$\int e^x dx = e^x + C;$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
$\int tgx dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$	

ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \quad (a - const)$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x = \varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx = \varphi'(u)du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через u и du, имеем $\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int F(u)du$

Из способов интегрирования рекомендуется изучить лишь непосредственное интегрирование (приведение к одному или нескольким табличным интегралам) и метод подстановки (замена переменной).

Примеры:

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 5x + 9}{x^2} dx = \int\left(3x^2 + 2 - \frac{5}{x} + 9x^{-2}\right) dx = \frac{3x^3}{3} + 2x - 5\ln|x| + 9\frac{x^{-1}}{-1} + c =$$

$$= x^3 + 2x - 5\ln|x| - \frac{9}{x} + c.$$

1.

2. Найти $\int x^2(4 + x^3)^4 dx$.

Сделаем подстановку $t = 4 + x^3.$ Найдем дифференциал обеих частей подстановки: $dt = 3x^2 dx,$ откуда $x^2 dx = \frac{1}{3}dt.$ Следовательно,

$$\int x^2(4 + x^3)^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} + c = \frac{1}{15}t^5 + c = \frac{1}{15}\left(4 + x^3\right)^5 + c.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{4} + C.$$

3.

Задания практической работы

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется первообразной для функции f(x)?
2. Дайте определение неопределенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Каким действием можно проверить интегрирование?
5. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 5)dx$

2) $\int (4x^2 + 5x - 3)dx$

3) $\int (2x^3 + 1)^2 dx$

4) $\int (3x^2 + 5)x^2 dx$

5) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$

6) $\int (6x^4 + 5x^3 - 4)dx$

7) $\int \frac{1}{2}(4x - 6)^2 dx$

8) $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$

9) $\int \frac{dx}{(4x+1)^4}$

10) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1}$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a; b] называется предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$ при $n \to \infty$, где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ И ПЕРВООБРАЗНОЙ (ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА)

Для непрерывной функции

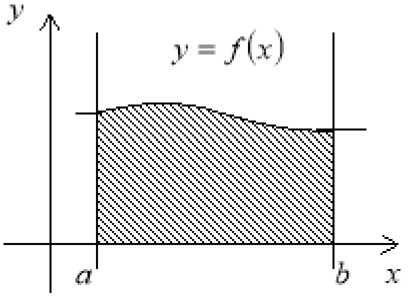
$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где *F(x)* - первообразная для *f (x)*

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛ

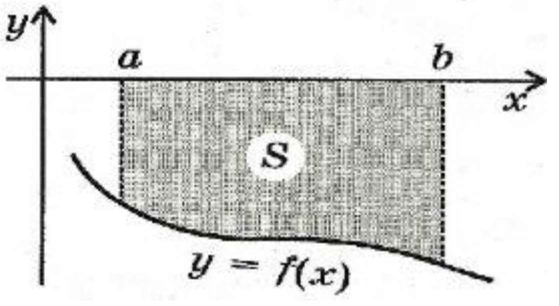
1	$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx$	**3**	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2	$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$	**4**	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x = a и x = b

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке функции f(x), осью x и прямыми x = a и x = b

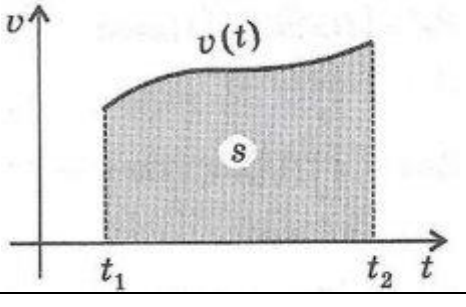
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Если функция изменяет знак на промежутке [a;b], то S

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$

Определенный интеграл широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин. Следует разобраться в следующих приложениях определенного интеграла:
- вычисление площади плоских фигур (геометрический смысл определенного интеграла);
- нахождение объема тела вращения;
- вычисление пути, пройденного точкой и скорости тела;
- вычисление работы силы.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

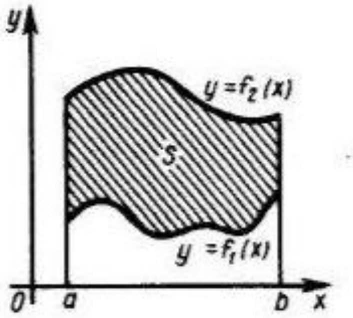
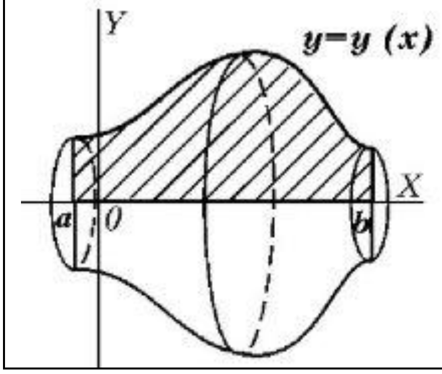


При прямолинейном движении перемещение S численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости V от времени t^

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ
С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ,
ограниченной графиками непрерывных функций y= $f_1(x)$ и y = $f_2(x)$ таких, что $f_2(x) \geq f_1(x)$ для любого $x \in [a;в]$,

	где а и в – абсциссы точек пересечения графиков функций: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$
	ОБЪЕМ ТЕЛА, полученного в результате вращения вокруг оси х криволинейной трапеции, ограниченной графикам непрерывной и неотрицательной функции у = у(х) на отрезке [a,b] $V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$

Примеры: Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$

2. $\int_2^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}$

3. $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx = (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)\Big|_{-1}^2 = (\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2) - (\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)) = 9$

4) $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

5) $\int_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int_1^5 \frac{dx}{x} = 7(\ln x)\Big|_1^5 = 7(\ln 5 - \ln 1) = 7(\ln 5 - 0) = 7\ln 5$

Задания практической работы

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
3. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
4. Приведите примеры физических и технических задач которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Вычислите определенные интегралы:

1) $\int_1^3 5x^3dx$	6) $\int_{-1}^1 (e^{4x} + 1)\partial x$
2) $\int_{-1}^2 (6x^2 - 5x + 4)dx$	7) $\int_0^1 \frac{\partial x}{(3x+1)^4}$
3) $\int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx;$	8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \cdot \partial x$

4) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x)\cdot\partial x$	9) $\int_0^1 3^{2x+1}\partial x$
5) $\int_4^5 (4-2x)^3\ \partial x$	10) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x})\cdot\partial x$

РАЗДЕЛ. Основы дискретной математики

Элементы теории множеств. Операции над множествами. Комбинаторика. Элементы теории графов.

Практические работы: *Выполнение операции над множествами.*

Тема. Элементы теории множеств

Методические указания

Одним из основных исходных понятий в математике является понятие множества и его элементов. Основатель теории множеств Георг Кантор дал следующее определение множества: *множество есть собрание определенных и различных между собой объектов, мыслимых как единое целое.*

Множество состоит из элементов. Принадлежность элемента α множеству А обозначается $\alpha \in A$; непринадлежность элемента α множеству А обозначается $\alpha \notin A$ или $\alpha \in A$.

Множество А называется *подмножеством* множества В ($A \subseteq B$, где $\subseteq$ знак включения), если всякий элемент А является элементом В.

Множества А и В *равны* (А = В), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то А называется *строгим или истинным подмножеством* В ($A \subset \subset B$, знак строгого включения).

В математике рассматривается множество, не имеющее элементов. Такое множество называют *пустым* и обозначают Ø. При этом $\varnothing \subset A$, т.е. пустое множество является подмножеством любого множества А.

Обычно множество задается описанием свойств элементов в него входящих. Так, запись $\{x \mid S\}$ читается так: «множество элементов x, обладающих свойством S».

Операции над множествами.

Объединением множеств А и В ($A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in$ **B}.**

Пересечением множеств А и В ($A \cap B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и А, и В: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Разностью множеств А и В (А \ В) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Симметрической разностью множеств А и В ($A \Delta B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов А и В, которые содержатся только в одном из этих множеств, то есть не содержатся в их пересечении: $A\Delta B = \{x \mid x\ (A \cup B) \setminus (A \cap B)\}$.

Пусть Е — *универсальное множество*, такое что все рассматриваемые множества являются его подмножествами. Дополнением (до Е) множества А (А) называется множество всех элементов, не принадлежащих А, но принадлежащих Е: $\overline{A}$=E\A

Пример. А и В – числовые промежутки, А = (0,5; 7]; В = [3; 8,7); Е= [0; 10].

Найти: $A \cup B$; $A \cap B$; $A\Delta B$; A\B; B\A; A; $\overline{A}$; $\overline{B}$

Решение. В объединение $\cup$A B войдут те и только те числа (точки оси), которые входят хотя бы в один из этих двух промежутков; получаем промежуток числовой оси, где штриховка встречается хотя бы один раз, т. е. $A \cup B$ = (0,5;8,7).

В пересечение $\cap$A B войдут те и только те числа, которые входят в оба промежутка: поэтому выбираем промежуток числовой оси, где штриховка нанесена дважды, т. е. $A \cap B$= [3;7].

Множество A\B содержит те и только те числа из A, которые не входят в B: поэтому выбираем тот из заштрихованных промежутков первой оси, который не заштрихован на второй, т. е.. =A B\ (0,5;3) . Точка 3 не входит в промежуток, т. к. $B \in 3$.

Аналогично, B\A = (7; 8,7).

Симметричная разность $A\Delta$ B есть объединение A\B и B\A, т.е. $A\Delta$ B= (0,5;3) $\cup$ (7; 8,7) Дополнение А , обозначаемое $\overline{A}$, состоит из тех и только тех точек универсального множества I, которые не входят в A , т. е. $\overline{A}$ = [0; 0,5] $\cup$ (7; 10]. Аналогично, B= [0; 3) $\cup$ [8,7; 10]

Тема. Элементы комбинаторики

Методические указания

Пусть имеется множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Набор элементов s_{i1} , s_{i2} , …, s_{ik} из множества S называется выборкой объема k (k-элементной выборкой) из n элементов.

Выборка называется *упорядоченной*, если порядок элементов в ней задан. Иначе выборка называется неупорядоченной.

Так же различают выборки с повторениями и без повторений в зависимости от того, допускается или не допускается повторное вхождение в выборку одних и тех же элементов. *Пример 1*. Пусть S = {1, 2, 3}. Тогда (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) — все возможные упорядоченные выборки объема два из трех элементов.

Всякий установленный в конечном множестве порядок называется ***перестановкой*** его элементов. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n.

$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)n$

Размещением из n элементов по k называется упорядоченная выборка без повторений объема k из n-элементного множества.

Поскольку элементы нашего множества S пронумерованы некоторым образом, не умаляя общности можно называть размещением из n элементов по k упорядоченный набор из k различных чисел, принадлежащих множеству {1, …, n}.

Обозначим A_n^k количество различных размещений из n по k. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Пример 2. 1) Пусть на экзамене у преподавателя n различных билетов и сдавать пришло k студентов. Тогда существует ровно A_n^k способов выдать всем студентам по одному билету для подготовки.

2) Пусть S = {1, 2, 3}. Тогда (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2) — все возможные размещения из трех элементов по два.

Сочетанием из n элементов по k называется неупорядоченная выборка без повторений объема k из n-элементного множества.

Как и раньше, можем считать, что сочетанием из n элементов по k называется неупорядоченный набор из k различных чисел, принадлежащих множеству {1, …, n}. Количество сочетаний из n по k обозначим C_n^k. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пример 3. 1) Предположим из n участников спортивного клуба на соревнования должны поехать какие-то k. Тогда имеется C_n^k различных возможности собрать команду.

2) Пусть S = {1, 2, 3}. Тогда {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} — все возможные сочетания из трех элементов по два.

Задания практической работы

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое n-факториал?
2. Что называется перестановками? Запишите формулу.
3. Что называется размещением? Запишите формулу.
4. Что называется сочетанием? Запишите формулу.

Выполните упражнения:

1. Пусть E = {1, 2, 3, 4}, A = {1, 3, 4}, B = {2, 3}, C = {1, 4}. Найти: а) $\overline{A} \cup \overline{B}$; б) $A \cap \overline{B}$; в) $(B \backslash A) \cup \overline{C}$
2. Пусть A = {1, 2}, B = {2, 3}, C = {1, 3}. Найти: а)$A \cup B \cup C$; б)$A \cap B \cap C$; в)$A \setminus (B \cup C)$; г)$(A \backslash B) \cup C$; д)$(A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
3. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера – Венна следующие множества: а) $A \cap \overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B$; в) $A \cup \overline{B}$; г) $\overline{A} \cup B$.
4. Обследование 100 студентов вуза, изучающих различные 12 иностранные языки, дало следующие результаты: 28 человек изучают немецкий язык, 30 человек – английский, 12 человек – французский; немецкий и английский – 8 человек; немецкий и французский – 5 человек; английский и французский – 10 человек; все три языка – 3 человека. Определить, сколько студентов изучает только один иностранный язык (немецкий, английский, французский); не изучает ни одного иностранного языка.
5. A и B – числовые промежутки, I=[0, 10]. Найдите: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ если: а) A = [2; 7), B= (1; 5]; б) A = [1; 5], B = (2; 8]; в) A = [3; 9), B= (2; 4); г) A= [0; 8], B = (3; 9]; д) A = [0; 8], B= (3; 9]; е) A= [1; 4], B = (2; 6]; ж)A= [4; 9], B= (3; 5); з) A= (7; 9], B= [3; 8); и) A= [3; 6], B= (5; 7).
6. Вычислите: 1) $\frac{10!-8!}{8}$; 2) $\frac{5!-6!}{4!}$; 3) 6!(7!-3!)

7.Вычислите: 1) C_{15}^{13}; 2) $C_6^4 + C_5^1$; 3) A_{10}^4

8. Решите уравнения: 1) $A_7^3 = 42x$; 2) $A_{m+1}^3 = 5m(m+1)$

Тема. Операции над множествами

Цель: закрепить навыки осуществления операций над множествами, навыки использования диаграмм Эйлера-Венна.

Перед началом занятия необходимо знать: понятия множества, подмножества, универсального множества, пересечения множеств, объединения множеств, разности двух множеств и дополнения; понятие диаграмм Эйлера-Венна.

После окончания занятия необходимо уметь: находить пересечение, объединение, разность и дополнение множеств, в том числе с использованием диаграмм Эйлера-Венна.

Основные теоретические положения и примеры решения типовых заданий.

Понятие множества. Подмножества.

Понятие множества относится к аксиоматическим понятиям математики.

Множество – совокупность определённых, различимых между собой объектов, рассматриваемых как единое целое, и обладающая некоторым общим свойством.

Имеется три важных момента, характеризующих понятие множества:

1) объекты, входящие во множество, определённые – т.е. для каждого объекта можно однозначно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет;

2) объекты, входящие во множество, различимы между собой – т.е. во множестве не может быть двух или более одинаковых объектов;

3) все объекты, входящие во множество, мыслятся как единое целое – т.е. во множестве абстрагируются от свойств отдельных объектов, но говорят об общем свойстве множества, как единого целого; такое общее свойство называют характеристическим.

Например, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой.

Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т.д. Объекты, входящие во множество, называют **элементами**.

Например:

– множество букв русского алфавита;

– множество натуральных чисел;

– множество студентов, сидящих на 1-м ряду.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным**, в противном случае множество называется **бесконечным**. Множество может содержать и всего лишь один элемент. Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается ∅.

Множества A и S_1, рассмотренные выше, – конечные, а множество N – бесконечное.

Принадлежность элемента множеству записывается значком ∈. Например:

– буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;

– буква «бета» не принадлежит множеству букв русского алфавита;

– число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;

– число 5,5 – не принадлежит множеству натуральных чисел;

– Вольдемар не сидит в первом ряду.

Таким образом, если множество содержит конечное число элементов, то оно может быть задано перечислением его элементов. Множество может быть также задано при помощи правила, позволяющего определить, является ли данный объект элементом множества или нет. При записи правило, задающее множество, отделяется вертикальной чертой или двоеточием.

Например,

1) – множество чисел, принадлежащих отрезку (подразумевается множество действительных чисел, которые перечислить через запятую уже невозможно);

2) – множество рациональных чисел, то есть, чисел, представимых в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества B одновременно является элементом множества A. Иными словами, множество B содержится во множестве A: . Значок называют *значком включения*.

Например:

1. A – это множество букв русского алфавита. Обозначим через C – множество его гласных букв, которое будет подмножеством множества A. Тогда: .
2. Пусть заданы множества A = {1, 3, 5, 7} и B = {3, 5}. Очевидно, что B есть подмножество A, т.е. .
3. Множество N натуральных чисел является подмножеством множества Z целых чисел

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение . Говорят, что A – самое широкое подмножество A. Пустое множество является подмножеством любого множества. Пустое множество является самым узким подмножеством любого множества.

Зафиксированное каким-либо образом множество объектов, допустимых при данном рассмотрении, называют **универсальным множеством** (базовым множеством, основным множеством, универсумом). Часто обозначается U.

Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обозначают так: A = B.

Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B. Обозначается .

Объединением множеств A и B называется такое множество , каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств A или B. Обозначается .

Разностью двух множеств A и B называется множество , содержащее лишь те элементы из A, которые не входят в B. Обозначается .

Если множество B – подмножество множества A (), то разность называется **дополнением** к B в множестве A. Обозначается .

Дополнением множества A по отношению к универсальному множеству U есть множество , составленное из всех тех элементов U, которые не находятся в A

Практическая часть.

Задания выполняются по вариантам, заданным преподавателем.

Задание 1. Образуйте все подмножества множества букв в слове.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

«руль»

«фары»

«диск»

Задание 2. Данные множества задать перечислением всех своих элементов.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

$A=\{x \in R | x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

$A=\{x \in Z | \leq 2^x < 5\}$

$A=\{x \in N | x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$

Задание 3. Даны множества A и B. Найти: A∩B, A∪B, A\B, B\A, .

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

а)

A, B ⊆ Z

A = {1;2;5;7;9;11}

B = {1;4;6;7}

A, B ⊆ Z

A = {3;6;7;10}

B = {2;3;10;12}

A, B ⊆ Z

A = {1;2;5;7;9;11}

B = {1;4;6;7}

б)

A = { a , b , c , d , e , f , k }

B = { a , c , e , k , m , p }

A = { a , b , c , e , k, l, m } B = { c , e , k , x , y, z }

A = { b , c , d , e , f , x, y} B = { a , e ,f , k , n, o}

в)

A, B ⊆ R

A = [-3; 7), B = [-4; 4].

A, B ⊆ R

A = [1;6), B = [-1;9]

A, B ⊆ R

A = [4; 7), B = [3; 6]

Задание 4. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождество.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

A\(B ∪ C) = (A\B) ∩ (A\C)

A∪ (B\C) = (A ∩ B)\C

A∪(B \C) = (A∩B) \ (A∩C)

Дополнительные задания:

Решите задачу используя круги Эйлера: В группе английский язык изучают 15 студентов, немецкий – 10 студентов, а французский – 5, причем 3 студента изучают одновременно английский и немецкий языки, 2 студента изучают одновременно английский и французский языки, 1 студент изучает одновременно французский и немецкий языки. Сколько всего человек в классе изучают эти иностранные языки? Сколько человек изучают только английский язык? немецкий язык? французский язык?

РАЗДЕЛ. Элементы линейной алгебры

Тема. Матрицы и определители

Основные определения

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i - номер строки, j - номер столбца.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или в сокращенной записи, $A = \left(a_{ij}\right)$; $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Например, $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: [ ], $\| \ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$A = \left(a_{11}\ a_{12}\ ,\dots,\ a_{1n}\right)$ – матрица-строка; $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Матрица называется **квадратной** n **-**го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной.** Например, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n -го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n -го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Операции над матрицами.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$. Например, если

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = O$.

Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

В частном случае $A + O = A$.

Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1)\cdot B$.

Умножение матриц. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда **произведением матриц** $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj},\quad i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Пример. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$,

где $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно):

$\underset{2\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 3}{B}=\underset{2\times 3}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix} (-1)\cdot 3+0\cdot 5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot 0+0\cdot 4+2\cdot 0 & (-1)\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot 3+4\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+4\cdot 4+0\cdot 0 & 3\cdot 1+4\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}$.

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1. A+B=B+A. 2. (A+B)+C=A+(B+C). 3. α (A+B)=$\alpha A+\alpha B$.
4. A(B+C)=AB+AC. 5. (A+B)C=AC+BC. 6. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.
7. A(BC)=(AB)C.

Однако имеются и отличия.

а) Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведение матриц BA может и не существовать. Действительно, в примере получили произведение матриц $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3}$, а произведение $B_{3\times 3}\cdot A_{2\times 3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

б) Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

в) Когда оба произведения AB и BA существуют и оба – матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), **коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется,** т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$. В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы $\grave{A}$ n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A: AE=EA=A.

Таким образом, единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

г) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $A\cdot B=O$, не следует , что A=O или B=O.

Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m\,(m>1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m=A\cdot A\cdot\ldots\cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0=E,\quad A^1=A$. Нетрудно показать, что

$$A^m\cdot A^k=A^{m+k},\quad (A^m)^k=A^{mk}.$$

Пример. Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$. Необходимо заметить, что из равенства $A^m=O$ еще не следует, что матрица A=O.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспо- нированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$ В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^{т}$.

Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу A, тесно связано с решением систем линейных уравнений.

Определитель матрицы A обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1=|A|=a_{11}$. Например, пусть $A=(8)$, тогда $\Delta_1=|A|=8$.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое отыскивается по формуле

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Например, пусть $A=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-2\cdot 5-8\cdot 1=-18.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$**, или определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле

$$\Delta_3=|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 6=21.$$

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарруса). Покажем это на схеме

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 0 + 4 - 12 - 0 + 10 - 4 = -2.$$

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы А n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца ($i + j$) - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ - нечетное число. Например,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Определителем квадратной матрицы А n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S} A_{1S}$$

(разложение по элементам 1-й строки).

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Знание свойств определителей позволит избежать громоздких вычислений.

Свойства определителей

1. Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α, то её определитель умножится на это число α.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбц; за знак матрицы можно выносить общий множитель лишь всех элементов.

3. При транспонировании матрицы её определитель не изменяется: $|A'| = |A|$.
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.
5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны (в частности, равны), то её определитель равен нулю.
6. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой её строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е. $\Delta = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is}$.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т. е.

$$\sum_{S=1}^{n} a_{iS} A_{jS} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

9.Если каждый элемент i-й строки матрицы представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы равен сумме определителей таких матриц: у первой из них i-я строка состоит из первых слагаемых, а у второй – из вторых. Все остальные строки у всех трех матриц не изменятся.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} + в_{11} & a_{12} + в_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} в_{11} & в_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

10. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.

11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B - матрицы n-го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно определителей высоких порядков. При вычислении оп-ределителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1-9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержа-щую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу тре-угольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на
(-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$\left|A\right| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144 .$$

Пример. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot 3(-1) \cdot 4 + 0 = -24 .$$

На частном примере убеждаемся в том, что определитель треугольной (и, очевидно, диагональной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, такое, что произведе-ние $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной по отношению к квадратной матрице** A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $\left|A\right| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $\left(\left|A\right| \neq 0\right)$, то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае $(\text{при} \quad |A| = 0)$ - **вырожденной**, или **особенной**.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица А невырожденная. Можно доказать, что обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}; \; (|A| \neq 0), \qquad (1)$$

где $\tilde{A}$ - квадратная матрица n-го порядка, элементами которой являются алгебраи-ческие дополнения элементов матрицы A', транспонированной к А: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$, $i = \overline{1, n}; \; j = \overline{1, n}$. Матрицу $\tilde{A}$ называют присоединенной или союз- ной к матрице А.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица А – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица А – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к А.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji} \; (i = 1, 2, ..., n; \; j = 1, 2 ... n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji} (i = 1, 2, ..., n; \; j = 1, 2, ... n)$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле (1).

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Пример. Найти матрицу, обратную к данной:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$, т. е. матрица А – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к А:
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что
$$A'_{ij} = A_{ji}: \; \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}:$$

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}0 & 14 & -7\\ -3 & -1 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21}\\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ (рекомендуем в этом убедиться самостоятельно). Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства: 1) $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{-1}=A$; 3) $\left(A^{m}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{m}$; 4) $\left(A^{-1}\right)'=(A')^{-1}$; 5) $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице А размером $m\times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k\le\min(m;n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка матрицы А**.

Например, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы А обозначается rang A, rg A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т. е. $r(A)\le\min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. А=О;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Решение. Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A)\le\min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т. е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0$.

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A)\le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7\ne 0$, то $r(A)=2$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5. Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т. е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, r;\ r \le k$.

Замечание. Условие $r \le k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Пример. Найти ранг матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11} \neq 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11} = 0,\ -a_{31}/a_{11} = 2,\ -a_{41}/a_{11} = 1)$ и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (в данном случае $a_{22} = -1 \neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22} = -3,\ -a_{42}/a_{22} = -3)$, добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца

(кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен двум.

ЗАДАНИЕ. Вычислить определители:

	а)	б)	в)	г)
1.	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.
2.	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.
3.	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.
4.	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.
5.	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

ЗАДАНИЕ. Умножить матрицы:

	а)	б)	в)
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

	а)	б)	в)
2.	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.
3.	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.
4.	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.
5.	$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ. Найти обратные матрицы для матриц:

1. а) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.	**2.** а) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 10 & 5 & 1\end{pmatrix}$.
3. а) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.	**4.** а) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 8\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
5. а) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4 & 5 & -5\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & 7 & -2\end{pmatrix}$.	

ЗАДАНИЕ. Найти ранг матрицы двумя способами:

1. $\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 0\\ 2 & 4 & 7 & 1\\ 3 & 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$.	**2.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 1 & 11\end{pmatrix}$.	**3.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1 & 5\\ 3 & 8 & 1 & 9\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$.	**5.** $\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & 0\\ 3 & -1 & 3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.	

Тема. Системы линейных уравнений

К системам линейных уравнений приводит множество прикладных задач.

Основные понятия и определения

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m . \end{cases} , \qquad (2)$$

где $a_{ij}, b_i \ (i = 1, 2 \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n)$ - произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Решением системы (2) называется такая совокупность n чисел $(x_1 = k_1, \ x_2 = k_2, \ldots, \ x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ - несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $(x_1 = c, \ x_2 = 10 - 2c, \text{ где } c - \text{любое число})$.

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (2) в матричной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2). На основании определе-ния равенства матриц систему (2) можно записать в виде

$$AX = B. \qquad (3)$$

Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть число уравнений системы (2) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (2) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \qquad (3)$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, ..., n). \qquad (4)$$

Формулы (4) получили название формул Крамера. В соответствии с формулой (1) обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ - матрица, присоединенная к матрице A. Так как элементы матрицы $\tilde{A}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы A', транспонированной к A, запишем равенство (3) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| = \Delta$, получим после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + ... + b_nA_{n2} \\ .... \; .... \; .... \; ..... \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + ... + b_nA_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для любого j $(j = 1, 2, ..., n)$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}\right).$$

На основании свойства 10 определителей $b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj} = \Delta_j$, где Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца $(j = 1, 2, ..., n)$ столбцом свободных членов. Следовательно, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}.$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$. Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX = B$. Найдем определитель $|A| = 5$. Так как $|A| \neq 0$, матрица А – невырожденная, и существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. решение системы (4; 2; 1) .

б) Найдем определитель системы $\Delta = |A| = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера (4) $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$

т. е. решение системы (4; 2; 1).

Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (2) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заклю-чается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11},\ -a_{31}/a_{11}, \dots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответствен-но ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (2), исключим перемен-ную x_1, из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}.$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, \ldots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$, после $(r-1)$–го шага, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases}$$

Число нуль в последних $m - r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ в системе равны нулю. В этом случае последние $m - r$ уравнений в системе (5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (5) равно числу переменных, т. е. $r = n$ (в этом случае система (5) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (5) имеет ступенчатый вид). Переход системы (2) к равносильной ей системе (5) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (5) – **обратным ходом.**

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

называемую **расширенной матрицей системы** (2),так как в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3),
(-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и
прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13,5/8 = 27/16$ и,

прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\quad -\frac{117}{16} x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6+2}{-8} = -1$; из второго

$$x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$$

и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Система m линейных уравнений с n переменными

Вопрос о разрешимости системы (2) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т. е. $r = n$, то система (2) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т. е. $r < n$, то система (2) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пусть $r < n$; r переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ называются **основными** (или базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются неосновными (или свободными).

Решение системы (2), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется **базисным.**

Исследовать на совместность и решить методом Гаусса данную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен единице):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right)$$, т. е. $r(A) = r(A_1) = 2$. Следовательно, система совместна.

$r < n$, $(n = 4)$. Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.

Оставим в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$$

). Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4, \\ -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4, \end{cases}$$

откуда $x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4$ и $x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4$.

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ \ x_4 = c_2\right)$.

Задача. Решить систему матричным способом: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Тогда данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Решаем его, домножая слева на обратную матрицу: $A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad EX = A^{-1}B$. Отсюда получаем решение $X = A^{-1}B$.

Найдем сначала A^{-1}.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)(0-(-2)) = -6$$.

($\Delta_A \neq 0$,значит $A^{-1}\ \exists$).

$$A_{11} = \underset{(+)}{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$A_{21} = \underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-(-2)) = -2$$

$$A_{31} = \underset{(+)}{(-1)^{3+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$A_{12} = \underset{(-)}{\left(-1\right)^{2+2}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(0-\left(-1\right)\right) = -1,$$

$$A_{22} = \underset{(+)}{\left(-1\right)^{1+2}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{32} = \underset{(-)}{(-1)^{3+2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3, \qquad A_{13} = \underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-1 = -5,$$

$$A_{23} = \underset{(-)}{(-1)^{2+3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1 \qquad A_{33} = \underset{(+)}{(-1)^{3+3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot(+3) \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-3)(-3) \\ 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + (-3)(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т. е. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему: $1 - 2 + 3 = 2$ (истина), $2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1$ (истина), $1 - 2 \cdot 2 = -3$ (истина).

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

1) Решить систему методом Крамера.

Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$, запишем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{2} & -1 & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-3} & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-)(0+2) = -6$$

.

Заменим в Δ столбец коэффициентов при y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 3 & \cancel{0} \\ 1 & -3 & \cancel{0} \end{vmatrix} = 1\underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\ \underset{(-)}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 3 = -18$$
.

По формулам Крамера получаем решение $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-12}{-6} = 2 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-18}{-6} = 3 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

3) Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Выписываем расширенную матрицу $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее или к треугольному виду, или к виду трапеции (как получится).

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) (-2) \quad (-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) (3)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-1) \\ :(-6) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right). \quad rA = 3,\ rB = 3 \Rightarrow r = 3.$$

Так как число неизвестных $n = 3$ и равно рангу системы, система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это

решение: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$.

Из последнего уравнения $z = 3$, с помощью второго находим $y = 5 - z = 5 - 3 = 2$. Подставляя в первое уравнение найденные $y = 2$ и $z = 3,$ находим $x = 2 + y - z = 2 + 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \quad (-1) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$rA = 2,\ rB = 3.$ Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т. е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

в) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ -2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

Записываем расширенную матрицу:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2) \quad (-3) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$rA = rB = 2$. Отсюда следует, что система совместна.

Число неизвестных $n = 3 > r = 2$. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений: $n - r = 3 - 2 = 1$. Отсюда система имеет одну свободную переменную, пусть это будет z, тогда $x,\ y$ – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, т. е. сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице: $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + 4z = -4 \\ z = z \end{cases}$.

Следовательно, идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z. Из второго уравнения выражаем $y = -4 - 4z,$ из первого уравнения

$x = y + z + 1 = (-4 - 4z) + z + 1 = -4 - 4z + z + 1 = -3 - 3z.$

Общее решение: $\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$.

Из общего решения можно получить любое частное решение. Пусть $z = -2$, тогда получим частное решение: $x = -3 - 3(-2) = -3 + 6 = 3; \quad y = -4 - 4(-2) = -4 + 8 = 4.$

Частное решение: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$.

Выполним проверку общего решения. Для этого подставим найденные выражения x, y, z в уравнения исходной системы:

$$1) \quad 3(-3 - 3z) - 2(-4 - 4z) + z = -1$$

$$-\underline{9} - \underline{\underline{9z}} + \underline{8} + \underline{\underline{8z}} + \underline{\underline{z}} = -1 \qquad -1 = -1 \quad (\text{истина})$$

$$2) \quad -2(-3 - 3z) + (-4 - 4z) - 2z = 2$$

$$\underline{6} + \underline{\underline{6z}} - \underline{4} - \underline{\underline{4z}} - \underline{\underline{2z}} = 2 \qquad 2 = 2 \quad (\text{истина})$$

$$3) \quad (-3 - 3z) - (-4 - 4z) - z = 1$$

$$\underline{-3} - \underline{\underline{3z}} + \underline{4} + \underline{\underline{4z}} - \underline{\underline{z}} = 1 \qquad 1 = 1 \quad (\text{истина})$$

Ответ: $\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

1.	а) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$.
2.	а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$.
3.	а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$.
4.	а) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Задание. Решить системы методом Гаусса:

1.	а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1 \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}$.
2.	а) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 6x - 2y + 3z + t = 5 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}$.
3.	а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x - 7y + 6z = 4 \\ x + 12y - 11z = -7 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 8x + y - 3z = -1 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - y - z = -6 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \\ 3x + 9y + 3z = 6 \end{cases}$.
4.	а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ 3x + y - 5z = 1 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = 5 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 5z = 1 \\ 3x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases}$.

РАЗДЕЛ. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятностей. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайная величина. Закон распределения случайной величины.

Методические указания

Прежде чем познакомиться с основными понятиями теории вероятностей следует рассмотреть три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания. Уяснить для себя, чем отличаются перестановки от размещения, перестановки от сочетания, размещения от сочетания.

По рекомендуемой литературе разобраться в формулах и в решенных комбинаторных задачах. Рассмотрите понятие случайного события и на примерах разберитесь в видах события: невозможные, достоверные, совместные, несовместные, зависимые, независимые.

После этих понятий следует изучить классическое определение вероятности события, и научиться находить вероятность в простейших задачах, используя классическое определение вероятностей.

Из операций над событиями необходимо познакомиться лишь с суммой конечного числа событий.

Изучение теоретического материала следует сопровождать рассмотрением решенных задач по предложенным учебникам, а затем следует ответить на вопросы для самоконтроля.

Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта. Количественной же характеристикой результата проведенного опыта является случайная величина.

Рассматривая примеры, необходимо усвоить понятие случайной величины, виды случайной величины (дискретной и непрерывной) и их определения. Нужно рассмотреть соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Такое соответствие называется законом р определения случайной величины. Закон распределения случайной величины удобно давать в виде таблицы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под случайным событием? Приведите примеры.
2. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
3. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
4. Что понимается под вероятностью события?
5. Дайте классическое определение вероятности события.
6. Какие события называются несовместными, совместными? Приведите примеры.
7. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
8. Дайте определение частоты наступления события и объясните от чего она зависит?
9. Какими свойствами обладает вероятность события?
10. Какие события называются независимыми, зависимыми? Приведите примеры.
11. Какая величина называется случайной?

Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики

Тема. Сложение и умножение вероятностей

Цель: научиться вычислять вероятности суммы совместных и несовместных событий, произведения независимых и зависимых событий.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основы теории вероятностей; необходимо ***уметь*** вычислять вероятность событий с использованием элементов комбинаторики.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. ***Суммой*** A + B двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.
    a. **Теорема сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий: **P (A + B) = P(A) + P(B)**
    b. **Теорема сложения вероятностей совместных событий.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: **P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)**
2. ***Произведением*** двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.
    a. **Теорема произведения для независимых событий**. Для независимых событий вероятность совместного появления событий равна произведению вероятностей этих событий: **P(AB) = P(A) P(B).**

b. **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: **$P(AB) = P(A)\, P_A(B)$.**

3. ***Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.***

Если события A_1, A_2, A_3,… A_n независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$ и т.д.; q_1, q_2, q_3, …, q_n – вероятности противоположных событий.

Вероятность наступления события А, состоящего в наступлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3,… A_n равна:

$P(A) = 1 - q_1q_2q_3 \ldots q_n$.

4. ***Вероятность появления только одного из двух событий.*** **$P(A) = p_1q_2 + p_2q_1$**

Задачи

1.

Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий; английский и немецкий – 8%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы знает хотя бы один язык.

Имеется 3 ящика, содержащих по 20 деталей. В первом ящике 12, во втором 5 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

2.

Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,025; во второй – 0,03; в третий 0,019. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: р, = 0,1; р, = 0,15; р, = 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (не работает хотя бы 1 элемент).

3.

Имеется 3 ящика, содержащих по 15 деталей. В первом ящике 5, во втором 7 и в третьем 10 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Среди студентов группы 15% имеют отличные оценки по математике, 34% – по истории. При этом 12% являются отличниками по обеим дисциплинам. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент учится на «отлично» хотя бы по одной дисциплине.

4.

Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Решить задачу двумя способами.

5.

На полке стоят 6 учебников по математике и 3 по информатике. С полки наудачу берется сначала один учебник. Потом второй. Найти вероятность, что первая взятая книга будет учебником по информатике, а вторая учебником по математике.

В ящике находится 8 стандартных и 6 нестандартных детали. Наудачу вынимается сначала одна деталь, а потом вторая. Найти вероятность, что первая взятая деталь стандартная, а вторая нестандартная.

6.

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно высшего сорта.

7.

На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие А).

Решить задачу двумя способами.

Мастер обслуживают 5 станков. 20% рабочего времени он проводит у первого станка, 10% - у второго, 15% - у третьего, 25% - у четвертого, 30% - у пятого станка. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени мастер находится у 1, или 2, или 3 станка.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается операция сложения вероятностей от произведения?

2. Запишите способы, которыми можно рассчитать вероятность появления хотя бы одного события?

Тема. Закон распределения

Цель: провести диагностику усвоения основных понятий и формул по теории вероятности и понимания закона распределения

Задачи: выявить уровень усвоения знаний учащимися.

Инструкция по выполнению работы

На ответы на вопросы по математике дается90 минут. Работа состоит из 25 вопросов на знание определений и математических формул, а также возможности самим привести примеры.
В заданиях нужно написать четкое определение или формулу или привести пример. Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.
За каждый правильный ответ даётся один балл. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Вопросы

1. Сформулируйте классическое определение вероятности. В чем ограниченность этого определения? В чем различие между вероятностью и относительной частотой?
2. Когда применяют геометрическое определение вероятности? Почему в этих случаях нельзя пользоваться классическим определением?
3. Дайте определение суммы событий. Приведите примеры: суммы двух несовместных событий; суммы двух совместных событий.
4. Сформулируйте и докажите теорему о сложении вероятностей несовместных событий.
5. Дайте определение произведения событий. Приведите примеры: произведения двух независимых событий; произведения двух зависимых событий.
6. Что такое условная вероятность?
7. Сформулируйте теорему об умножении вероятностей для двух событий (общий случай). Какую форму принимает эта теорема в случае, когда события независимы?
8. Приведите формулу полной вероятности.
9. Приведите формулы Байеса.
10. Что такое схема Бернулли?
11. В каких случаях применяются: формула Бернулли; теорема Пуассона; теорема Муавра-Лапласа?
12. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
13. Что называется законом распределения вероятностей случайной величины?
14. Что называется математическим ожиданием случайной величины? Как оно обозначается? Докажите его свойства.
15. Что называется дисперсией случайной величины? Как она обозначается? Докажите ее свойства. Как взаимосвязаны среднеквадратическое отклонение и дисперсия?
16. Чему равны числовые характеристики биномиального распределения; распределения Пуассона?
17. Что называется функцией распределения случайной величины? Сформулируйте ее свойства. В чем различие графиков функций распределения для непрерывной и для дискретной случайных величин?
18. Дайте определение плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины, сформулируйте ее свойства.
19. Как найти вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение из данного интервала, если известна: ее функция распределения; ее плотность распределения вероятностей?
20. Как взаимосвязаны функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины?
21. Найдите $M[X]$ и $D[X]$ случайной величины, распределенной равномерно на интервале $(a; в)$.
22. Каков вероятностный смысл параметров a и σ случайной величины, распределенной по нормальному закону? Напишите плотность нормального распределения.
23. В чем заключается “правило трех сигм”? Как, пользуясь этим правилом, найти наименьшее и наибольшее значения нормально распределенной случайной величины?
24. Сколько параметров имеет показательное распределение? Как найти для данного распределения $M[X]$, $\sigma[X]$?

Тема. Вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины

Цели и задачи: обобщить и систематизировать знания по теме, провести диагностику усвоения системы знаний и умений выполнять задания стандартного уровня.

Обеспечение практической работы:

Конспект.

Карточки с заданиями.
1. Образуют ли полную группу следующие группы событий: а) опыт — бросание монеты; события: *А1* — появление герба; *А2* — появление цифры; б) опыт — бросание двух монет; события: *Вх*— появление двух гербов; *В2* — появление двух цифр; в) опыт — два выстрела по мишени; события: *А0* — ни одного попадания; *Ах* — одно попадание; *А2* — два попадания; г) опыт — два выстрела по мишени; события: *С1*— хотя бы одно попадание; *С2* — хотя бы один промах; д) опыт — вынимание карты из колоды; события: *D1*— появление карты червонной масти; *D2* — появление карты бубновой масти; *D3* — появление карты трефовой масти?
2. В урне а белых (б) и Ъ черных (ч) шаров. Из урны вынимают (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми 1.
3. В урне *а* белых и *Ь* черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.
4. В урне*а* белых, Ъ черных и *с* красных (к) шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными.
5. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: *А* — выпадение герба на первой монете; *В* — выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события *С = А + В.*
6. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события: *А* — среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновой масти; *В* — среди вынутых карт будет хотя бы одна червонной масти. Найти вероятность события *С = А + В.*
7. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.
8. В урне о белых и Ъ черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.
9 В урне *а* белых и Ъ черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.
10. В урне а белых и 6 черных шаров *(а* >2). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

«2»	«3»	«4»	«5»
0-5	6-8	9	10

Вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины»
Цель: закрепление теоретического материала по изучению среднего квадратичного отклонения дисперсии дискретной случайной величины
Методические указания
Дисперсия имеет размерность равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.
Среднее квадратическое отклонение равно корню квадратному из дисперсии, поэтому его размерность равна размерности случайной величины. Например, если X выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ тоже выражается в линейных метрах, а D(X) – в квадратных метрах.
2. Пример:
Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины X, заданной следующим законом распределения:
X 2 4 6 8
P 0.2 0.15 0.35 0.3
Решение.
Найдем математическое ожидание M(X):
M(X)=2*0.2+4*0.15+6*0.35+8*0.3= 5.5
Составим закон распределения случайной величины X^2:
X^2 4 16 36 64
P 0.2 0.15 0.35 0.3
$M(X^2)$=4*0.2+16*0.15+36*0.35+64*0.3=0.8+2.4+12.6+19.2=35
D(X)=$M(X^2)$-$M^2(X)$=35-$(5.5)^2$=35-30.25=4.75

Найдем среднее квадратичное отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{4.75}=2.18$
Примеры для самостоятельного решения
1. Дано следующее распределение дискретной случайной величины X
X 1 2 4 5
P 0.31 0.1 0.29 0.3
Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение, используя формулы для их определения.
2. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

3. Случайная величина X задана следующим законом распределения:

x_I 1 3 6 8
p_I 0,2 0,1 0,4 0,3

найти M(x) – математическое ожидание, D(x) – дисперсию, σ(x) – среднее квадратическое отклонение случайной величины

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X , которая задана следующим рядом распределения:

X 2 3 10
P 0,1 0,4 0,5

Тема. Основные понятия математической статистики

Элементы статистики. Ряд наблюдений. Таблица распределения. Относительная частота появления события.

Практические работы. *Построить полигон частот в выборке.*

Методические указания

Числовые характеристики выборки.

При проведении статистического исследования после сбора и группировки данных переходят к их анализу, используя для этого различные обобщающие показатели. Простейшими из них являются: среднее арифметическое (среднее выборочное), мода, медиана, размах.

1) Среднее арифметическое $(\overline{x_в})$**(*среднее выборочное*)** имеет двойной смысл: оно может быть средним значением признака в данной совокупности (например, средняя зарплата отдела); это приближенное значение постоянной величины, подвергающейся изменениям (например: рост человека).

Для нахождения среднего значения выборки нужно:
- сложить все результаты, входящие в выборку;
- полученную сумму разделить на количество результатов.

Для нахождения среднего выборочного нужно:
- каждую варианту умножить на её частоту;
- сложить все полученные произведения;
- разделить найденную сумму на объём выборки.

2) *Размах выборки* – это разность между наибольшей и наименьшей вариантой. $R = x_{max} - x_{min}$.

3) *Мода выборки* – это наиболее часто встречающаяся варианта (M_0).

Сложность в том, что редкая совокупность имеет единственную моду.

Соглашения по поводу моды:

- Если все значения в группе встречаются одинокого часто, считают, что у данной группы, моды нет.
- Когда два соседних значения имеют одинаковую частоту и эти частоты больше любых других частот в группе, то модой считают среднее от этих двух значений.
- Если два несмежных значения имеют равную и наибольшую в данной группе частоту, то у этой группы есть две моды, такая группа называется бимодальной.

Если распределение имеет несколько мод, то говорят, что оно мультимодально или многомодально. Мультимодальность распределения дает важную информацию о природе исследуемого признака. Например, в социологических опросах, если признак представляет собой предпочтение или отношение к чему-то, то мультимодальность может означать, что существуют несколько определенно различных мнений.

4)*Медиана выборки* – это серединное значение упорядоченного ряда выборки (M_e).

Если в ряду нечётное число элементов, то медиана равна значению центрального элемента.

Если в ряду чётное число элементов, то медиана равна среднему арифметическому двух центральных значений.

<u>Пример 1</u>

Дан вариационный ряд: 4, 6, 3, 8, 4, 3, 5, 4, 5, 6, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 4.

Составим таблицу распределения частот:

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	4	6	4	3	1	2

Найдем размах, моду и среднее выборочное:

$$R = x_{max} - x_{min} = 8 - 5 = 3$$
$$M_0 = 4$$
$$\overline{x_в} = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2}{20} = 4{,}85$$

Задания

1) Найти среднее арифметическое, размах ряда чисел:

а) 24, 22, 27, 20, 16, 32

$$x_в = \frac{24 + 22 + 27 + 20 + 16 + 32}{6} = 23{,}5$$
$$\boldsymbol{R = x_{max} - x_{min}} = 32 - 16 = 16.$$

б) 35, 5, 23, 5, 28, 30

$$x_в = \frac{35 + 5 + 23 + 5 + 28 + 30}{6} = 21$$
$$\boldsymbol{R = x_{max} - x_{min}} = 35 - 5 = 30$$

2) Найти медиану ряда чисел:

а) 30, 32, 37, 40, <u>41</u>, 42, 45, 49, 52 – упорядоченный ряд из девяти элементов. $\mathrm{M_e} = 41$.

б) 102, 104, 205, <u>207</u>, 327, 408, 417 – упорядоченный ряд из семи элементов. $\mathrm{M_e} = 207$.

в) 16, 18, <u>20, 22</u>, 24, 26 – упорядоченный ряд из шести элементов. $\mathrm{M_e} = \frac{20+22}{2} = 21$.

г) 1,2; 1,4; 2,2; 2,6; 3,2; 3,8; 4,4; 5,6 – упорядоченный ряд из восьми элементов. $\mathrm{M_e} = \frac{2{,}6+3{,}2}{2} = 2{,}9$.

Задания практической работы

1. Проведя учёт числа бракованных деталей в 10 ящиках с одинаковым числом деталей, получили следующий ряд данных: 1, 2, 2, 3, 1, 0, 2, 1, 3, 2.

Составить вариационный ряд, таблицу распределения частот. Найдите для этого ряда объем выборки, среднее арифметическое, размах, медиану и моду. Построить полигон частот в выборке.

2. Отмечая время (с точностью до минуты), которое токари бригады затратили на обработку одной детали, получили такой ряд данных:

30, 32, 32, 38, 36, 31, 32, 38, 35, 36, 32, 40, 42, 36, 33, 35, 32, 32, 40, 38.

Составить вариационный ряд, таблицу распределения частот. Найдите для этого ряда объем выборки, среднее арифметическое, размах, медиану и моду. Построить полигон частот в выборке.

3. В организации вели ежедневный учёт поступивших в течение месяца писем. В результате получили такой ряд данных:

39, 43, 40, 0, 56, 38, 24, 21, 35, 38, 0, 58, 31, 49, 38, 25, 34, 0, 52, 40, 42, 40, 39, 54, 0, 64, 44, 50, 38, 37, 32.

Составить вариационный ряд, таблицу распределения частот. Найдите для этого ряда объем выборки, среднее арифметическое, размах, медиану и моду. Построить полигон частот в выборке.

Подготовка обучающихся к практическим занятиям осуществляется с учетом общей структуры учебного процесса. На практических занятиях осуществляется входной и текущий аудиторный контроль в виде опроса, по основным понятиям дисциплины.

Подготовка к практическим занятия подразумевает проработку конспектов, изучение тем вынесенных на самостоятельную работу. Для осуществления работы по подготовке к занятиям, необходимо ознакомиться с методическими указаниями по дисциплине, внимательно ознакомиться с литературой и электронными ресурсами, с рекомендациями по подготовке.

Подготовка обучающихся к практическим занятиям осуществляется с учетом общей структуры учебного процесса. На практических занятиях осуществляется входной и текущий аудиторный контроль в виде опроса, по основным понятиям дисциплины.

Подготовка к практическим занятиям подразумевает проработку конспектов. Для осуществления работы по подготовке к занятиям, необходимо ознакомиться с методическими указаниями по дисциплине, внимательно ознакомиться с литературой и электронными ресурсами, с рекомендациями по подготовке.

3. Промежуточная (семестровая) аттестация по курсу

3.1. Оценочные средства, применяемые для промежуточной аттестации по итогам изучения дисциплины

Дифференцированный зачет проводится по завершении изучения дисциплины на последнем аудиторном занятии.

Промежуточная аттестация по дисциплине в форме дифференцированного зачета осуществляется по результатам текущего контроля успеваемости при выполнении всех видов текущего контроля, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

Обучающиеся, не выполнившие виды работ, предусмотренные рабочей программой дисциплины; пропустившие более 50% аудиторных занятий без уважительной причины, не допускаются к дифференцированному зачету.

Промежуточная аттестация таких лиц проводится только после прохождения ими всех видов текущего контроля.

3.2. Заключительное тестирование по итогам изучения дисциплины

По итогам изучения дисциплины, обучающиеся проходят заключительное тестирование. Тестирование является формой контроля, направленной на проверку владения терминологическим аппаратом, современными информационными технологиями и конкретными знаниями по дисциплине.

3.2.1 Подготовка к заключительному тестированию по итогам изучения дисциплины

Процедура тестирования ограничена во времени и предполагает максимальное сосредоточение обучающегося на выполнении теста, содержащего несколько тестовых заданий.

3.2.2 Шкала и критерии оценивания

ответов на тестовые вопросы тестирования по итогам освоения дисциплины

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если получено более 80% правильных ответов.
- оценка «хорошо» - получено от 71 до 80% правильных ответов.
- оценка «удовлетворительно» - получено от 60 до 70% правильных ответов.
- оценка «неудовлетворительно» - получено менее 60% правильных ответов.