Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный аграрный университет имени П.А.Столыпина»

Тарский филиал
Отделение среднего профессионального образования

ППССЗ по специальности 21.02.19 Землеустройство

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по освоению учебной дисциплины
ОД.07 Математика

Обеспечивающее преподавание дисциплины подразделение – Отделение среднего профессионального образования	
Разработчик: преподаватель	Гринёва Л.П.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Настоящее издание является основным организационно-методическим документом учебно-методического комплекса по дисциплине в составе программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ). Оно предназначено стать для них методической основой по освоению данной дисциплины.

2. Содержательной основой для разработки настоящего издания послужила Рабочая программа учебной дисциплины, утвержденная в установленном порядке.

3. Методические аспекты настоящего издания развиты в учебно-методической литературе и других разработках, входящих в состав УМК по данной дисциплине.

4. Доступ обучающихся к электронной версии Методических указаний по изучению дисциплины, обеспечен в информационно-образовательной среде университета.

При этом в электронную версию могут быть внесены текущие изменения и дополнения, направленные на повышение качества настоящих методических указаний до их переиздания в установленном порядке.

Уважаемые обучающиеся!

Приступая к изучению новой для Вас учебной дисциплины, начните с вдумчивого прочтения разработанных для Вас специальных методических указаний. Это поможет Вам вовремя понять и правильно оценить ее роль в Вашем образовании.

Ознакомившись с организационными требованиями отделения среднего профессионального образования по этой дисциплине и соизмерив с ними свои силы, Вы сможете сделать осознанный выбор собственной тактики и стратегии учебной деятельности, уберечь самих себя от неразумных решений по отношению к ней в начале семестра, а не тогда, когда уже станет поздно. Используя это издание, Вы без дополнительных осложнений подойдете к семестровой аттестации по этой дисциплине. Успешность аттестации зависит, прежде всего, от Вас. Ее залог – ритмичная, целенаправленная, вдумчивая учебная работа, в целях обеспечения которой и разработаны эти методические указания.

1. Материалы по теоретической части дисциплины

1.1. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет ресурсов, дополнительной литературы, справочные и дополнительные материалы по дисциплине

Основные печатные издания

Среднее профессиональное образование: теоретический и научно-методический журнал / Министерство образования и науки Российской Федерации. - Москва. - ISSN 1990-679. – Текст : непосредственный.

Основные электронные издания

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы (базовый и углубленный уровни): учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. — 11-е изд., стер. — Москва: Просвещение, 2023. — 463, [1] с.: ил. - ISBN 978-5-09-107210-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2089825 – Режим доступа: для авториз. пользователей.

Дополнительные источники

1. Дадаян А. А. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 544 с. — ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1891827 – Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Бардушкин В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. — 304 с. — ISBN978-5-906923-05-9. - Текст: электронный. - URL:https://znanium.com/catalog/product/1235904. – Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Бардушкин В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — Москва: КУРС, ИНФРА-М, 2022. — 368 с. — ISBN978-5-906923-34-9. - Текст: электронный. - URL:https://znanium.com/catalog/product/1817031 – Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Каазик Ю. Я. Математический словарь / Каазик Ю. Я. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 336 с. - ISBN 978-5-9221-0847-8. - Текст : электронный. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922108478.html - Режим доступа : для авториз. пользователей.

1.2. Тематический план теоретического обучения

Раздел 1. Алгебра и начала математического анализа

Тема 1.1. Числа и вычисления. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Арифметические операции с рациональными числами, преобразования числовых выражений. Применение дробей и процентов для решения прикладных задач из различных отраслей знаний и реальной жизни.

Действительные числа. Рациональные и иррациональные числа. Арифметические операции с действительными числами. Приближенные вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений.

Степень с целым показателем. Стандартная форма записи действительного числа. Использование подходящей формы записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных.

Арифметический корень натуральной степени. Действия с арифметическими корнями натуральной степени.

Синус, косинус и тангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента.

Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел.

Степень с рациональным показателем. Свойства степени.

Логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы.

Тема 1.2. Уравнения и неравенства. Тождества и тождественные преобразования.

Преобразование тригонометрических выражений. Основные тригонометрические формулы.

Уравнение, корень уравнения. Неравенство, решение неравенства. Метод интервалов.

Решение целых и дробно-рациональных уравнений и неравенств.

Решение иррациональных уравнений и неравенств.

Решение тригонометрических уравнений.

Применение уравнений и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.
Преобразование выражений, содержащих логарифмы.
Преобразование выражений, содержащих степени с рациональным показателем.
Примеры тригонометрических неравенств.
Показательные уравнения и неравенства.
Логарифмические уравнения и неравенства.
Системы линейных уравнений. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.
Системы и совокупности рациональных уравнений и неравенств.
Применение уравнений, систем и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.
Тема 1.3. Функции и графики. Функция, способы задания функции. График функции. Взаимно обратные функции.
Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Четные и нечетные функции.
Степенная функция с натуральным и целым показателем. Ее свойства и график. Свойства и график корня n-ой степени.
Тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента.
Функция. Периодические функции. Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.
Тригонометрические функции, их свойства и графики.
Показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики. Использование графиков функций для решения уравнений и линейных систем. Использование графиков функций для исследования процессов и зависимостей, которые возникают при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни.
Тема 1.4. Начала математического анализа. Последовательности, способы задания последовательностей. Монотонные последовательности.
Арифметическая и геометрическая прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула сложных процентов. Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера.
Непрерывные функции. Метод интервалов для решения неравенств.
Производная функции. Геометрический и физический смысл производной.
Производные элементарных функций. Формулы нахождения производной суммы, произведения и частного функций.
Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
Применение производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах, для определения скорости процесса, заданного формулой или графиком.
Первообразная. Таблица первообразных.
Интеграл, его геометрический и физический смысл. Вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
Тема 1.5. Множества и логика. Множество, операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
Применение теоретико-множественного аппарата для описания реальных процессов и явлений, при решении задач из других учебных предметов.
Определение, теорема, следствие, доказательство.

Раздел 2. Геометрия

Тема 2.1. Прямые и плоскости в пространстве. Основные понятия стереометрии. Точка, прямая, плоскость, пространство. Понятие об аксиоматическом построении стереометрии: аксиомы стереометрии и следствия из них.
Взаимное расположение прямых в пространстве: пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве: параллельные прямые в пространстве, параллельность трех прямых, параллельность прямой и плоскости. Углы с сонаправленными сторонами, угол между прямыми в пространстве. Параллельность плоскостей: параллельные плоскости, свойства параллельных плоскостей. Простейшие пространственные фигуры на плоскости: тетраэдр, куб, параллелепипед, построение сечений.
Перпендикулярность прямой и плоскости: перпендикулярные прямые в пространстве, прямые параллельные и перпендикулярные к плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о прямой перпендикулярной плоскости. Углы в пространстве: угол между прямой и плоскостью, двугранный угол, линейный угол двугранного угла. Перпендикуляр и наклонные: расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой до плоскости, проекция фигуры на

плоскость. Перпендикулярность плоскостей: признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Тема 2.2. Многогранники. Понятие многогранника, основные элементы многогранника, выпуклые и невыпуклые многогранники, развертка многогранника. Призма: n-угольная призма, грани и основания призмы, прямая и наклонная призмы, боковая и полная поверхность призмы. Параллелепипед, прямоугольный параллелепипед и его свойства. Пирамида: n-угольная пирамида, грани и основание пирамиды, боковая и полная поверхность пирамиды, правильная и усеченная пирамида. Элементы призмы и пирамиды. Правильные многогранники: понятие правильного многогранника, правильная призма и правильная пирамида, правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр, куб. Представление о правильных многогранниках: октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Сечения призмы и пирамиды.

Симметрия в пространстве: симметрия относительно точки, прямой, плоскости. Элементы симметрии в пирамидах, параллелепипедах, правильных многогранниках.

Вычисление элементов многогранников: ребра, диагонали, углы. Площадь боковой поверхности и полной поверхности прямой призмы, площадь оснований, теорема о боковой поверхности прямой призмы. Площадь боковой поверхности и поверхности правильной пирамиды, теорема о площади усеченной пирамиды. Понятие об объеме. Объем пирамиды, призмы.

Подобные тела в пространстве. Соотношения между площадями поверхностей, объемами подобных тел.

Тема 2.3. Тела вращения. Цилиндрическая поверхность, образующие цилиндрической поверхности, ось цилиндрической поверхности. Цилиндр: основания и боковая поверхность, образующая и ось, площадь боковой и полной поверхности.

Коническая поверхность, образующие конической поверхности, ось и вершина конической поверхности. Конус: основание и вершина, образующая и ось, площадь боковой и полной поверхности. Усеченный конус: образующие и высота, основания и боковая поверхность.

Сфера и шар: центр, радиус, диаметр, площадь поверхности сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости, касательная плоскость к сфере, площадь сферы.

Изображение тел вращения на плоскости. Развертка цилиндра и конуса.

Комбинации тел вращения и многогранников. Многогранник, описанный около сферы, сфера, вписанная в многогранник, или тело вращения.

Понятие об объеме. Основные свойства объемов тел. Теорема об объеме прямоугольного параллелепипеда и следствия из нее. Объем цилиндра, конуса. Объем шара и площадь сферы.

Подобные тела в пространстве. Соотношения между площадями поверхностей, объемами подобных тел.

Сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения шара.

Тема 2.4. Векторы и координаты в пространстве. Вектор на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Правило параллелепипеда. Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Простейшие задачи в координатах. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Координатно-векторный метод при решении геометрических задач

Раздел 3. Вероятность и статистика.

Тема 3.1. Элементы теории вероятностей и статистика. Представление данных с помощью таблиц и диаграмм. Среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия и стандартное отклонение числовых наборов.

Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий. Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными событиями.

Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера. Формула сложения вероятностей.

Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события.

Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона.

Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли.

Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Примеры распределений, в том числе, геометрическое и биномиальное.

Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение. Примеры применения математического ожидания, в том числе в задачах из повседневной жизни. Математическое ожидание бинарной случайной величины. Математическое ожидание суммы случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия геометрического и биномиального распределений.

Закон больших чисел и его роль в науке, природе и обществе. Выборочный метод исследований.

Примеры непрерывных случайных величин. Понятие о плотности распределения. Задачи, приводящие к нормальному распределению. Понятие о нормальном распределении.

2. Материалы по практическим занятиям

2.1. Практические занятия по курсу и подготовка обучающегося к ним

В ходе практических занятий, как одной из форм систематических учебных занятий, обучающиеся приобретают необходимые умения и навыки по тому или иному разделу дисциплины «Математика».

Общие цели практического занятия сводятся к закреплению теоретических знаний, более глубокому освоению уже имеющихся у обучающихся умений и навыков и приобретению новых умений и навыков, необходимых им для осуществления своей профессиональной деятельности и составляющих квалификационные требования к специалисту.

Основными задачами практических занятий являются:

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности обучающихся во время выполнения ими практических заданий.

РАЗДЕЛ I. Алгебра и начала математического анализа.

1. Развитие понятия о числе

Выполнение приближенных вычислений.

ТЕОРЕТИТЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть ***x*** – приближенное число, ***a*** – точное значение.

	абсолютная погрешность	**относительная погрешность**
Формула	$\Delta = \mid a - x \mid$ или $a = x \pm \Delta$	$\varpi = \dfrac{\Delta}{\mid x \mid}$ **(**или $\varpi = \dfrac{\Delta}{\mid a \mid}$)
граница	h>0: $\Delta \leq h$	ξ >0: $\varpi \leq \xi$
Взаимосвязь:	$h = \xi \cdot \mid x \mid$	$\xi = \dfrac{h}{\mid x \mid}$

Цифра α в приближенном числе, записанном в виде десятичной дроби, называется **верной**, если АП числа не превосходит единицы того разряда, в котором записана эта цифра. В противном случае она называется **сомнительной.**

<u>Правило записи приближенного числа десятичными дробями.</u>

- Если не указана граница АП, то в приближении все цифры верные (например, в записи a=3,7412$\pm$ 0,002 3, 7, 4 – верные, 1, 2 – сомнительные)
- Если 0 – сомнительный, то указывается это словесно (например, 278,7 млн.чел.) или в стандартном виде, где целая часть числа <10 (например, $2,787 \cdot 10^8$)

Все верные цифры в десятичной записи числа, кроме 0, расположенных левее первой отличной от 0 цифры, называются **значащими** цифрами.

<u>Погрешности вычислений с приближенными данными.</u>

a, b – точные значения, x, y – приближенные

a$\pm$ b$\approx$ x$\pm$ y:		ab$\approx$ xy:		$a^n \approx x^n$:		$\sqrt[n]{a} \approx \sqrt[n]{x}$:
$h_{a \pm b} = h_a + h_b$		$\dfrac{a}{b} \approx \dfrac{x}{y}$ $\xi_{ab} = \xi_{\frac{a}{b}} = \xi_a + \xi_b$		$\xi = n \cdot \xi_a$		$\xi = \dfrac{1}{n} \cdot \xi_a$

<u>**Правила подсчета верных цифр**</u>:

<u>Для суммы и разности:</u>

1. округлить числа так, чтобы после запятой оставалось наименьшее количество цифр (из всех чисел)
2. выполнить действия сложения или вычитания
3. округлить результат на 1 разряд меньше

<u>Для умножения и деления</u>.

1) выполнить действие
2) в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их имеет исходной данное с наименьшим числом верных значащих цифр.

<u>Для промежуточных результатов:</u>

1) сохраняется на 1-2 цифры больше, чем указано в правилах
2) в результате последняя цифра округляется

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Укажите верные и сомнительные цифры в приближениях a=271,3421$\pm$0,035

2. Найдите границу абсолютной погрешности, если $e^2 \approx 7,3890$, E=0,00001

3. Определите абсолютную и относительную погрешность, округлив данное число до тысячных $\sqrt{7}$

4. Выполнить действия: $\dfrac{1,234 + 52,34 - 14,3456}{12,87676 \cdot 1,23}$, если все цифры верные

5. Вычислить наиболее рациональным способом:

а) $0,2 + 4,8 \cdot (1,22 : 0,4 - 3)$

б) $\dfrac{0,2 \cdot 1,18 + 0,8 \cdot 1,8}{1,3^2 - 0,25}$

в) $-0,5^2 : 0,5^3 - 27^{\frac{1}{3}} + 4^4 \cdot 4^{-2} - 0,2^0$

Вариант 2.

1.Укажите верные и сомнительные цифры в приближениях a=34,025±0,05

2. Найдите границу абсолютной погрешности, если tg $40^0 \approx 0,839$, E=0,0003

3. Определите абсолютную и относительную погрешность, округлив данное число до тысячных $\sqrt{2}$

4. Выполнить действия: $\dfrac{10,4321 \cdot 5,301}{1,403 + 5,7632 - 67,34}$, если все цифры верные

5. Вычислить наиболее рациональным способом:

а) $(9,9 + 2,16 : 0,2) \cdot 2,5 + 1,5$

б) $\dfrac{0,01 - 0,5^2}{0,4 \cdot 0,12 + 0,88 \cdot 0,4}$

в) $81^{\frac{1}{4}} - 3,5^0 - 1,5^3 \cdot 1,5^{-2} + 2^2 : 2^{-3}$

Вариант 3.

1.Укажите верные и сомнительные цифры в приближениях a=0,0102±0,003

2. Найдите границу относительной погрешности, если a=3,7412±0,002,

3. Определите абсолютную и относительную погрешность, округлив данное число до тысячных $\sqrt{8}$

4. Выполнить действия: $\dfrac{78,345 - 6,8593 + 23,5}{10,45 \cdot 1,3201}$, если все цифры верные

5. Вычислить наиболее рациональным способом:

а) $0,25 + 0,75 : (0,8 \cdot 2,25 - 2,05)$

б) $\dfrac{0,25 - 1,5^2}{0,6 \cdot 1,2 + 0,6 \cdot 0,8}$

в) $32^{\frac{1}{5}} + 5^{-2} \cdot 5^4 - 12^0 - 3^{-2} : 3^{-3}$

Вариант 4.

1. Укажите верные и сомнительные цифры в приближениях a=204,330±0,0001

2. Найдите границу относительной погрешности, если a=4300±5.

3. Определите абсолютную и относительную погрешность, округлив данное число до тысячных $\sqrt{11}$

4. Выполнить действия: $\dfrac{12,321 \cdot 3,98}{2,789 - 5,82913 + 12,3}$, если все цифры верные

5. Вычислить наиболее рациональным способом:

а) $(0,1 + 0,32 \cdot 1,25) : 1,5 - 1,5$

б) $\dfrac{0,2 \cdot 0,6 - 0,2 \cdot 1,6}{1 - 0,8^2}$

в) $6,5^0 - 3^2 : 3^{-1} - 81^{\frac{1}{4}} + 2^3 \cdot 2^{-6}$

Действия над числами. Применение комплексных чисел в расчете физических величин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

z=a+bi – алгебраическая форма, *a* – действительная часть, *bi* – мнимая.

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

$z_1*z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2)^2+(b_2)^2}$.

Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в степень, но при этом надо учитывать, что:

$i^0=1$	$i^{4n}=1$
$i^1=i$	$i^{4n+1}=i$
$i^2=-1$	$i^{4n+2}=-1$
$i^3=-i$	$i^{4n+3}=-i$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Задание 1. Выполните действия в алгебраической форме.

Вариант 1.

а) $\frac{5-i}{2-3i}$ б) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$

в) $\frac{1+i}{1-2i}-\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\right)$

Вариант 2.

а) $\frac{-1+5i}{3-2i}$ б) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(3-i)}$

в) $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Задание 2. Найти значение функции при заданном значении аргумента

Вариант 1.

$y=x^3-x^2+10$ при $x=2+i$

Вариант 2.

$y=x^2-x^3+15$ при $x=1-2i$

Задание 3. Решить уравнение

Вариант 1.

$x^2+2x+5=0$

Вариант 2.

$x^2-6x+18=0$

Задание 4. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел:

Вариант 1.

$5x-2y+(x+y)i=4+5i$

Вариант 2.

$5y-9+(3x-y)i=10x+14yi$

Задание 5. Записать комплексное число в алгебраической форме:

Вариант 1.

$4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Вариант 2.

$2e^{\frac{3\pi}{4}i}$

Задание 6. Записать комплексное число в показательной форме и выполнить действие:

Вариант 1.

1) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, z^5

2) $z=-1-i$, $\sqrt[3]{z}$

Вариант 2.

1) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, z^4

2) $z=-1+i$ $\sqrt[3]{z}$

ПРИМЕР 1. Написать комплексное число, соответствующее уравнению (считать ω=314 рад/с или =18000 град/с). $u=2{,}4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$

РЕШЕНИЕ. $\acute{u}=2{,}4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=2{,}4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1{,}2\sqrt{2}(1+i)$

ПРИМЕР 2. Написать уравнение гармонического колебания, соответствующее данному комплексному числу (считать ω=3145 рад/с или =18000 град/с). $z=3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)$

РЕШЕНИЕ. $u=3\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{12}\right)$

ПРИМЕР 3. Два генератора, которые дают (при стандартной частоте) соответственно напряжения $u_1=220\sin(\omega t+60^0)$ и $u_2=127\sin(\omega t-90^0)$, соединены последовательно. Определить напряжение на зажимах цепи, т.е. суммарное напряжение (рис. 1)

РЕШЕНИЕ. Для нахождения суммарного напряжения $u=220\sin(\omega t+60^0)+127\sin(\omega t-90^0)$ вычисляем сумму $\acute{U}$ соответствующих комплексных числе – комплексов напряжений $\acute{U}_1=220(cos60^0+i\cdot sin60^0)=220\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\acute{U}_2=127(cos(-90)^0+i\cdot sin(-90)^0)=127(0-i)$. Имеем $\acute{U}=\acute{U}_1+\acute{U}_2=220\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+127(0-i)\approx 110+63{,}5i$

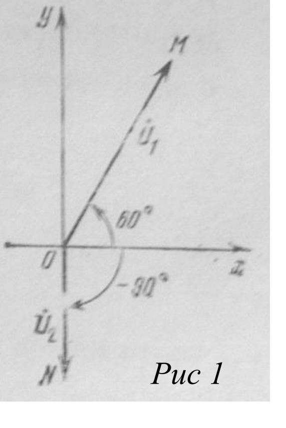


Рис 1

Представим полученное комплексное число в показательной форме:

$\left|\acute{U}\right|=\sqrt{110^2+63{,}5^2}\approx 127$, $\varphi=arctg\left|\frac{63{,}5}{110}\right|\approx 30^0 10'\approx 30^0$

Следовательно, суммарное напряжение задается уравнением $u\approx 127e^{i\cdot 30^0}$

На основании рассмотренных примеров выполните следующее задание:

Задание 7. Написать комплексное число в показательной и алгебраической формах,

соответствующее уравнению (считать ω=314 рад/с или =18000 град/с) и построить соответствующие векторы.	
Вариант 1. u=2sin$\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)$	**Вариант 2**. u=2,5sin$(\omega t+1{,}5\pi)$
Задание 8. Найти суммарное напряжение, если генераторы, дающие напряжения u_1 и u_2, соединены последовательно.	
Вариант 1. u_1=110sin(ωt+90^0) и u_2=100sin(ωt+150^0)	**Вариант 2**. u_1=127sin(ωt+30^0) и u_2=127sin(ωt+60^0)

Раздел I. Алгебра.

2. Корни, степени и логарифмы

Преобразование и сравнение иррациональных выражений

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

$$\mathrm{a}^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\qquad \text{обратно } \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Признак сравнения двух иррациональных выражений

- Если A>0 и B>0, то из неравенства $A^2\geq B^2$ следует, что A≥B.
- Если A<0 и B<0, то из неравенства $A^2\leq B^2$ следует, что A≤B.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3***	**Вариант 4***
1. Представить степень с дробным показателем в виде корня			
а) $2a^{\frac{1}{3}}$ б)$(2a)^{-\frac{3}{4}}$ в) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}$ г) $x:\left(\sqrt[6]{x}\right)^2$	а) $3b^{\frac{1}{2}}$ б) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$ в) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$ г) $x:\left(\sqrt[4]{x}\right)^2$	а) $4x^{-\frac{3}{7}}$ б)$(4x)^{1.5}$ в) $\frac{\sqrt{x^{-1}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^2}{x^{-\frac{7}{6}}}$	а) $5x^{-\frac{5}{6}}$ б) $(5x)^{2.5}$ в) $\frac{\sqrt[3]{x^{-1}}\cdot\left(x^{-0{,}25}\right)^2}{x^{-\frac{1}{6}}}$
2. Заменить арифметический корень степенью с рациональным показателем			
а) $\sqrt[5]{7^2}$ б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$	а) $\sqrt[7]{2^4}$ б) $\frac{1}{\sqrt{c^3}}$	а) $\sqrt[11]{2a^2}$ б) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^{-3}}}$	а) $\sqrt[9]{3a^4}$ б) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^{-4}}}$
3. Вычислить			
а) $9^{\frac{1}{6}}\cdot 9:9^{\frac{1}{3}}$ б) $25^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{-\frac{1}{6}}\right)^{-3}$	а) $4^{-\frac{1}{3}}\cdot 4:4^{\frac{1}{6}}$ б) $27^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2}$	а) $\frac{100^{1.3}\cdot 100^{-\frac{2}{15}}}{100^{\frac{2}{3}}}$ б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot\left(3^{-\frac{3}{4}}\right)^2$ в) $\left(\frac{1}{49}\cdot 0.09\right)^{-0.5}$	а) $\frac{25^{1.25}\cdot 25^{-\frac{5}{12}}}{25^{\frac{1}{3}}}$ б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{5}{9}}\cdot\left(2^{-\frac{2}{9}}\right)^3$ в) $\left(\frac{1}{36}\cdot 0.16\right)^{-0.5}$
4. Упростить			
а) $\left(8x^{-0{,}3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ б) $a^{2{,}5}\cdot\left(a^{-\frac{3}{14}}\right)^7$	а) $\left(81y^{-0{,}4}\right)^{-\frac{3}{4}}$ б) $b^{3{,}5}\cdot\left(b^{-\frac{5}{18}}\right)^9$	а) $\left(16a^{1.5}\right)^{-\frac{2}{3}}$ б) $a^{-1\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{5}{6}}\cdot\left(a^{0.5}\cdot b^{\frac{1}{18}}\right)^3$ в) $\frac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{6}}}$ г) $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{5}{3}}\right)x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$	а) $\left(32a^{2.5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ б)$a^{-1\frac{1}{3}}\cdot b^{0.75}\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{16}}\right)^4$ в) $\frac{a^{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{a}}{a^{\frac{1}{12}}}$ г) $\left(x^{\frac{5}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$
5. С помощью формул сокращенного умножения преобразовать выражение			
$\left(2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{2}{3}}\right)^2$	$\left(a^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)^2$
6. Сравнить:			
$\sqrt{5}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{8}$		$\sqrt{7}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{9}$	
7. Сократить дробь			
		а) $\frac{(x-y)x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{0.5}+y^{0.5}\right)x^{\frac{2}{3}}}$	а) $\frac{\left(x^{0.5}-y^{0.5}\right)y^{\frac{1}{4}}}{(x-y)y^{\frac{3}{4}}}$

Нахождение логарифма числа

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Свойства логарифма и степени

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	1. $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
2. $a^m:a^n=a^{m-n}$	2. $\log_a(b:c)=\log_a b-\log_a c$
или $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	или $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. $a^1 = a$

5. $a^0 = 1$

5. если $a>1$, $k<t$, то $a^k < a^t$

6. если $0<a<1$, $k<t$, то $a^k > a^t$

Только для степени

8. $(a \cdot b)^m = a^m b^m$

9. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

10. если $a<b$, $k>0$, то $a^k < b^k$

11. если $a<b$, $k<0$, то $a^k > b^k$

3. $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$

4. $\log_a a = 1$

5. $\log_a 1 = 0$

6. если $a>1$, $k<t$, то $\log_a k < \log_a t$

7. если $0<a<1$, $k<t$, то $\log_a k > \log_a t$

Только для логарифм

8. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$

9. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - переход к новому основанию

10. $a^{\log_a b} = b$ - **основное логарифмическое тождество**

2. Виды логарифмов

1. $\lg a$ - **десятичный** логарифм, т.е. логарифм числа *а* по основанию 10 ($\log_{10} a$)
2. $\ln a$ - **натуральный** логарифм, т.е. логарифм числа *а* по основанию e ($\log_e a$) ($e \approx 2{,}72$)

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Задание 1. Выполнить действия			
Вариант 1.	**Вариант 2.**	**Вариант 3.**	**Вариант 4.**
1. $lg8+lg125$ 2. $log_2 96 - log_2 12$ 3. $\frac{1}{5}^{log_{\frac{1}{5}}3+3}$ 4. $log_{16}1$ 5. $2a^{\frac{1}{2}} + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2$ 6. $4n^{0,2} \cdot 2n^{-1,2}$	1. $log_6 2 + log_6 3$ 2. $log_2 11 - log_2 44$ 3. $\frac{1}{4}^{log_{\frac{1}{4}}2-3}$ 4. $log_5 5$ 5. $2a^{\frac{1}{3}} - \left(a^{\frac{1}{9}}\right)^3$ 6. $12n^{1,7} \cdot (-0,5)n^{-3,7}$	1. $log_{12}4 + log_{12}36$ 2. $log_3(5/3) - log_3 15$ 3. $4^{log_4 6-2}$ 4. $lg10$ 5. $5a^{\frac{2}{3}} - \left(2a^{\frac{1}{3}}\right)^2$ 6. $5n^{3,5} \cdot 3n^{-0,5}$	1. $log_6 8 + log_6 27$ 2. $log_3 72 - log_3 8$ 3. $0,5^{log_{0,5}4-2}$ 4. $log_7 1$ 5. $2a^{\frac{3}{5}} - 3\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3$ 6. $7,5n^{4,5} \cdot 2n^{-2,5}$
Вариант 5.	**Вариант 6.**	**Вариант 7.**	**Вариант 8.**
1. $log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{25}\right) - log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)$ 2. $log_6 12 + log_6 3$ 3. $3^{log_3 7+3}$ 4. $ln1$ 5. $2a^{\frac{1}{2}} - \left(3a^{\frac{1}{4}}\right)^2$ 6. $6n^{0,5} \cdot 2n^{-1,5}$	1. $log_3 18 - log_3 2$ 2. $log_6 4 + log_6 9$ 3. $\frac{1}{4}^{log_{\frac{1}{4}}3-2}$ 4. $log_8 8$ 5. $4a^{\frac{2}{5}} + 2\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2$ 6. $4n^{2,3} \cdot (-0,5)n^{-1,3}$	1. $log_4 768 - log_4 12$ 2. $log_6 2 + log_6 18$ 3. $\frac{1}{4}^{log_{\frac{1}{4}}7+3}$ 4. $log_{82}82$ 5. $4a^{\frac{3}{2}} + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^6$ 6. $2n^{4,2} \cdot 6n^{-1,2}$	1. $log_{\frac{1}{5}}150 - log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{6}{5}\right)$ 2. $log_6 8 + log_6 27$ 3. $2^{log_2 5-1}$ 4. $log_3 1$ 5. $5a^{\frac{7}{9}} - \left(2a^{\frac{1}{27}}\right)^3$ 6. $2,5n^{6,1} \cdot 2n^{-1,1}$

Задание 2. Используя определения и свойства, найти Х	
Вариант 1.	**Вариант 2.**
1. $\log_3 x = -1$ 2. $\log_6 x = 3 \cdot \log_6 2 + 0,5 \cdot \log_6 25 - 2 \cdot \log_6 3$	1. $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$ 2. $\lg x = 5 \cdot \lg 2 + 2 \cdot \lg 3 - \frac{1}{2} \cdot \lg 4$
Вариант 3.	**Вариант 4.**
1. $\log_x 81 = 4$ 2. $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 25 - 3 \cdot \lg 3 + 4 \cdot \lg 2$	1. $\log_x 27 = 3$ 2. $\log_4 x = \frac{1}{3} \cdot \log_4 216 - 2 \cdot \log_4 10 + 4 \cdot \log_4 3$
Вариант 5.	**Вариант 6.**
1. $\log_5 x = 2$ 2. $\log_6 x = 3 \cdot \log_6 2 + 0,5 \cdot \log_6 25 - 2 \cdot \log_6 3$	1. $\log_7 x = -2$ 2. $\lg x = 5 \cdot \lg 2 + 2 \cdot \lg 3 - \frac{1}{2} \cdot \lg 4$
Вариант 7.	**Вариант 8.**

1. $\log_x \frac{1}{4}$ =-2	1. $\log_x \frac{1}{16}$ =2
2. $\lg x=\frac{1}{2}\cdot \lg 25-3\cdot \lg 3+4\cdot \lg 2$	2. $\log_4 x=\frac{1}{3}\cdot \log_4 216-2\cdot \log_4 10+4\cdot \log_4 3$

Логарифмирование и потенцирование выражений. Решение простейших уравнений

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Решение уравнений сводятся к решению уравнения вида

$a^x=a^b$,	$\log_a x=\log_a b$

т.е. представляем обе части уравнения с одним и тем же основанием в виде

степени	логарифма
При решении показательных уравнений **<u>проверка не делается</u>**, т.к. область определения показательной функции – все действительные числа	При решении логарифмических уравнений **<u>проверка делается</u>**, т.к. область определения логарифмической функции –положительные действительные числа

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1 Вариант	**2 Вариант**

1.Вычислить логарифмы:

1 Вариант		2 Вариант	
1) $\log_3 81$	5) $\log_7 343$	1) $\log_4 64$	5) $\log_9 729$
2) ln e	6) ln7,29	2) ln2,7	6) ln1
3) lg1000	7) lg0,001	3) lg10000	7) lg0,01
4) $\log_{1/6} 36$	8) $\log_{1/4} 256$	4) $\log_{1/7} 49$	8) $\log_{1/6} 216$

2.Вычислить логарифмы:

1 Вариант		2 Вариант	
1) $\log_4 32 + \log_4 2$	4) $\log_6 54 + \log_6 4$	1) $\log_3 36 – \log_3 4$	4) $\log_4 32 + \log_4 8$
2) $\log_5 5^2$	5) $\log_3 108 – \log_3 4$	2) $\log_5 1^4$	5) $\log_4 128 – \log_4 2$
3) $\log_2(8*128)$		3) $\log_5(25*125)$	

3. Прологарифмировать алгебраические выражения:

1 Вариант		2 Вариант	
1) $x=\frac{ab^2}{c^3}$	2) $x=\frac{m^2n^3}{t^2}$	1) $x=\frac{mn^2}{k^3}$	2) $x=\frac{b^2c^2}{d^4}$

4. Найти x:

1 Вариант		2 Вариант	
1) lgx = lga + 2lgв – lgc	3) lgx = lg5 – lg2 + lg3	1) lgx = lgm + 3lgn – lgp	3) lgx = lg7 + lg5 – lg3
2) lgx = lgd + 3lgc -$\frac{1}{2}$lgк	4) lgx = 2lg3 + 3lg5	2) lgx = $\frac{1}{2}$ lgt+lgz – 3lgy	4) lgx = 3lg2 – 2lg3+lg5

5. Вычислить

1 Вариант		2 Вариант	
1) $3^{\log_3 27}$	2) $2^{\log_2 32}$	1) $4^{\log_4 256}$	2) $10^{\lg 100}$

6. При каком основании:

1 Вариант		2 Вариант	
1) $\log_? 36$ =2	2) $\log_? 27$ = 3	1) $\log_? 64$ = 3	2) $\log_? 81$ = -4

7. Решить уравнения

1 Вариант		2 Вариант	
1) $\log_3(x-2)$ =2	3) $\log_3(2x-4) = \log_3(x+7)$	1) $\log_2(x-3)$ =2	3) $\log_4(2x-1) =\log_4(3x-3)$
2) $\log_5(x+6)$ =1		2) $\log_{13}(x-4)$ =1	

Критерии оценки выполнения самостоятельной работы

№ п/п	**Количество заданий**	**Балл за отдельный пример**	**Балл за все задание**	**Количество правильно выполненных примеров**	**Балл за выполненные примеры**
1	8	0,2	1,6		
2	5	0,2	1		
3	2	0,2	0,4		
4	4	0,2	0,8		
5	2	0,1	0,2		
6	2	0,1	0,2		
7	3	0,3	0,9		
	26		**5,1**		
Оценка					

Преобразование, сравнение показательных и логарифмических выражений

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

<u>При сравнении логарифмов с одинаковыми основаниями</u>:

— если основание больше единицы (a>1), функция возрастает, значит, большему значению аргумента соответствует большее значение функции (то есть знак неравенства не изменяется);

— если основание меньше единицы (0<a<1), функция убывает, значит, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (знак неравенства меняется на противоположный).

С помощью схемы сравнение логарифмов можно изобразить так:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2$$

$$\frac{a>1,\ \nearrow}{x_1 > x_2} \qquad \frac{0<a<1,\ \searrow}{x_1 < x_2}$$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Уровень сложности А

Критерий оценивания:

«3» - 3-5, «4» - 6-10

	Вариант 1	Вариант 2.
	1. Вычислить	
1.	$\left(\dfrac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}\right)^2.$	$\left(\dfrac{2^{\frac{5}{6}}\cdot 3^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}\right)^2.$
2.	$16^{\frac{3}{4}} - 2\cdot 27^{\frac{2}{3}} + 7^0.$	$8^{\frac{2}{3}} - 3\cdot 9^{\frac{3}{2}} + 5^0.$
3.	$\log_9 243.$	$\log_{81} 243.$
4.	$\log_4 32.$	$\log_{16} 8.$
5.	$49^{\log_7 3}.$	$25^{\log_5 8}.$
6.	$64^{\log_4 5}.$	$81^{\log_3 5}.$
7.	$2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}.$	$4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}.$
8.	$10^{1+\lg 5}.$	$10^{\lg 7+\lg\frac{2}{7}}.$
9.	$\log_5 10 + \log_5 2{,}5.$	$\log_7 28 + \log_7 0{,}25.$
10.	$\log_2 5 + \log_2 \dfrac{8}{5}.$	$\log_3 2 + \log_3 \dfrac{9}{2}.$
	2. Сравнить:	
11.	$\log_3 18$ и $\log_3 5$	$\log_3 7$ и $\log_3 21$
12.	$0{,}6^4$ и $0{,}6^3$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
13.	7^{30} и 4^{40}	3^{600} и 5^{400}

Уровень сложности Б

Критерий оценивания:

«5»-7-12 «4» - 5-6 «3»-2-4

	Вариант 1	Вариант 2.
	1. Вычислить	
1.	$\left(\dfrac{4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{25^{0,3}\cdot 5^{1,4}}{9^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}.$	$\left(\dfrac{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{7}{3}}}{2^{-6}\cdot 6^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$

2.	$\left(\dfrac{16^{\frac{2}{3}}\cdot 25^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-1,6}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{1\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{9}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\dfrac{4^{4}\cdot 5^{-3}}{7^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\dfrac{3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{9}{4}}}\right)^{2}$.
3.	$81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}+8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}$. .	$16^{0,125}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{2,5}+2\cdot 5^{0}$.
4.	$\dfrac{\log_3 64}{\log_9 4}$.	$\dfrac{\log_5 36}{\log_{25} 36}$.
5.	$\log_5\log_3\log_3 27$.	$\log_2\log_2\log_2 16$.
6.	. $0,36^{\log_{0,6} 5}$. .	$0,49^{\log_{0,7} 0,2}$.
7.	$2^{\log_4 9+\log_2 8}$.	$2^{2\log_2 5+\log_2 3}$.
8.	$2^{1-\log_{\sqrt{5}} 5}$.	$27^{\frac{1}{3}+\log_9 36}$.
9.	$16^{\log_4 2}+4^{1-2\log_4 2}$.	$49^{\log_7 2}+7^{1-2\log_7 2}$.
10	$9^{\log_3 2}-\log_3\dfrac{1}{27}$.	$3^{-\log_3\frac{1}{2}}-\log_{\frac{1}{2}} 4$.
11	$2^{\log_2\frac{8}{3}-3\log_2 3+2\log_2 9}$.	$5^{5\log_5 2-2\log_5 3+\log_5\frac{3}{2}}$.
12	$\log_2 32+\log_{32} 2$.	$3-\lg 50+\dfrac{1}{2}\lg 25$.
	2. Сравнить	
13	$\log_{0,2} 2$ и $\log_{0,2} 0,5$	$\log_{\frac{1}{3}} 4$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0,5$
14	2^{-3} и 2^{-5}	$(0,25)^{-2}$ и $(0,25)^{-8}$
15	$(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ и $\sqrt[3]{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ и $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$

Раздел I. Алгебра и начала математического анализа

3. Основы тригонометрии

Перевод из радианной меры в градусную меру и наоборот. Определение знаков тригонометрических выражений. Вычисление тригонометрических функций некоторых углов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Радианное измерение углов и дуг.

Радианная мера дуги: $A=\dfrac{L}{R}$, где L длина окружности, R - радиус называется А.

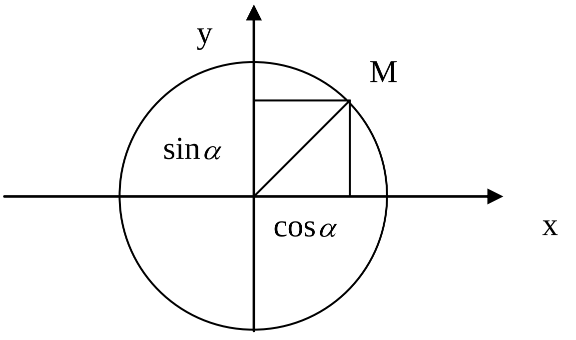
Окружность имеет радианную меру, равную 2π радиан.

2. Соотношение между градусной и радианной мерой угла.

$\dfrac{180^0}{\alpha}=\dfrac{\pi}{b}$, где α - градусная мера, b – радианная мера.

Переход от градусного измерения к радианному: $b=\dfrac{\pi}{180^0}\cdot\alpha$;

<u>от радианного к градусной</u>: $\alpha = \frac{180^0}{\pi} \cdot b$.



3. Тригонометрические функции

x=cosα **,**$| x |\le 1, | y |\le 1$

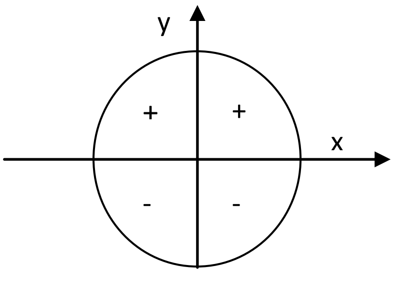
y=sinα **,** $| x |\le 1, | y |\le 1$

tgα **=** $\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ **,** $\alpha \ne \pm \frac{\pi}{2} + \pi k$, k $\in$ Z

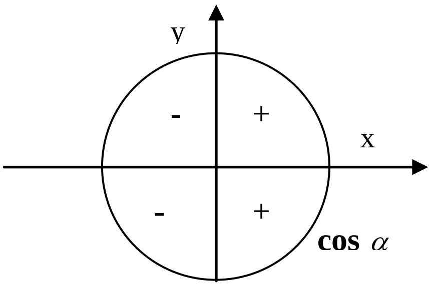
ctgα **=** $\frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ **,** $\alpha \ne \pi k$, k $\in$ Z

4. Значения тригонометрических функций некоторых углов.

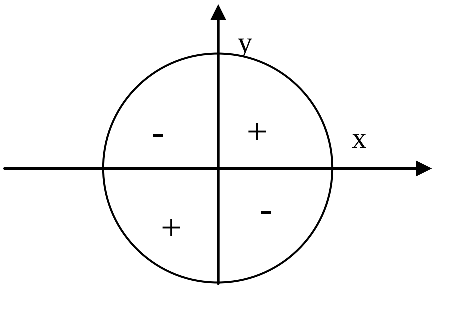
α , град	α , рад	sin	cos	tg	ctg
0^0	0	0	1	0	-
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	**-**	**0**
120^0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
135^0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150^0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
180^0	π	0	**-1**	**0**	**-**
210^0	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
225^0	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240^0	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	**0**	**-**	**0**
300^0	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
315^0	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**-1**	**-1**
330^0	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
360^0	2π	**0**	**1**	**0**	**-**



sin α



cos α



tg α **,** **ctg** α

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1. Данные углы выразите в радианах:			
17^0; 240^0; 1023^0	24^0; 492^0; 1000^0;	33^0; 363^0; 1500^0	6^0; 321^0; 2700^0.
2. Найдите угловую величину дуги в градусах, если её радианная мера равна:			
$0,8\pi$; $\frac{8\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$; $1,3\pi$	7π; $\frac{11\pi}{18}$	$0,75\pi$; 5π
3. Определить знак выражения:			
1) $\sin(-20^0)$; 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$; 3) $\mathrm{ctg}(-60^0)\ \mathrm{tg}150^0$	1) $\mathrm{tg}120^0$; 2) $sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; 3) $\cos(-50^0)\mathrm{ctg}200^0$	1) $\cos(-70^0)$; 2) $ctg\left(\frac{7\pi}{6}\right)$; 3) $\sin(-70^0)\mathrm{tg}50^0$	1) $\mathrm{ctg}\ 240^0$; 2) $sin\left(-\frac{11\pi}{7}\right)$; 3) $\cos(-95^0)\mathrm{tg}170^0$
4. Проверить неравенства, заменив тригонометрические функции их значениями:			
sin 30° + cos 45° > 1	$tg\frac{7\pi}{4} + sin\frac{7\pi}{6}$ <1	sin π/6 + sin π/3 > 1	ctg 225° + cos 300° > 1
5. Упростить			
1) $a\cos0^0+b\cos180^0+\sin360^0$ 2) $2\cos^2 315° + 3p\mathrm{ctg}135° + p^2\ \mathrm{tg}^2\ 300° — 2p^3 \sin^2 225°$.	1) $a^3\mathrm{ctg}270^0+b^3\mathrm{tg}0^0$ 2) $a^3\mathrm{tg}45^0 + a^2b\ \mathrm{tg}^2 240^0 + 9ab^2\ \mathrm{ctg}^2\ 60^0 + 2b^3 \cos 300^0$;	1) $a\sin0^0+b\cos90^0+\mathrm{tg}180^0$ 2) $m^2\mathrm{tg}\ 225° — 4mn\sin210° +3n^2\mathrm{tg}^2 30°$;	1) $a^2 sin2\pi + 2abcos\frac{3\pi}{2}$ 2) $k\cos45^0 + 2k\sin45^0 + 9k\ \mathrm{ctg}^2 45^0 - k\mathrm{ctg}\ 270^0$;
6. Найти значение выражения			
1) 2 cos 0° + 3 sin 90° + 4 tg 180° 2) $sin\frac{\pi}{2}\cdot cos^3\frac{\pi}{3} + \frac{1}{cos2\pi} + \frac{1}{sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ 3) 2 sin30° + 3 cos30° -2 tg30° - 4 ctg30°	1) sin 90° - 6 cos 90° + 3 tg 0° 2) $cos0\cdot sin\frac{3\pi}{4} - \frac{2cos\pi}{cos^2 0}$ 3) 5 sin45° + 2 cos45° + 3tg 45° - 10ctg45°	1) 5 sin 270° - 2 cos 0° + 3 ctg 90° 2) $\frac{1}{2}sin\pi - \sqrt{3}cos\pi + \frac{1+tg\frac{5\pi}{4}}{1-tg2\pi}$ 3) sin60° + 2cos60° — tg60° — ctg60°	1) 2 tg 0° + 8cos270° - 6 sin 90° 2) $\frac{sin\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{3}+cos\frac{\pi}{4}sin\frac{\pi}{3}}{tg^2\frac{\pi}{6}-sin^2\frac{\pi}{2}\cdot cos^2\frac{3\pi}{4}}$ 3) cos90° — cos180° + sin270° +tg360°

Четность и нечетность, периодичность тригонометрических функций. Доказательство тригонометрических тождеств

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Функции синус, косинус, тангенс, котангенс – периодические. Наименьший период для синуса и косинуса – 2π, а для тангенса и котангенса - π. Периодом для функций синус, косинус также будут являться числа 2π k, а для тангенса и котангенса - π k , где k$\in Z$. Т.о.

1. Основные тригонометрические тождества и следствия из них

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1,\ \alpha \neq \pi k/2,\ k\in Z.$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z.$$

2. Четность и нечетность

cos(-α)=cosα

sin(-α)= -sinα

tg(-α)= -tgα

ctg(-α)= -ctgα

3. Периодичность

sin($\alpha \pm 2\pi k$)=sin α

cos($\alpha \pm 2\pi k$)=cos α

tg($\alpha \pm \pi k$)=tg α

ctg($\alpha \pm \pi k$)=ctg α

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Вариант 1	Вариант 2
1. Упростить выражение:	
а) $tg^2\alpha\cdot cos^2\alpha + ctg^2\alpha\cdot sin^2\alpha$ б) $sin^4\alpha + sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha$	а) $sin^4\alpha - cos^4\alpha + cos^2\alpha$ б) $ctg^2\alpha - cos^2\alpha\cdot ctg^2\alpha - cos^2\alpha$

в) $\sin^2(2\pi+\alpha)+\cos^2(6\pi-\alpha)+1$	в) $tg^2(5\pi+\frac{\pi}{3})+ctg^2(3\pi-\frac{\pi}{6})$
2. Доказать тождества	
а) $(ctg\alpha+1)^2+(ctg\alpha-1)^2=\frac{2}{sin^2\alpha}$ б) $\frac{1+tg(3\pi+\alpha)+tg^2(7\pi-\alpha)}{1+ctg(5\pi-\alpha)+ctg^2(5\pi-\alpha)}=tg^2\alpha$	а) $tg^2\alpha(1+tg^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)-(1-tg^2\alpha)^2=4tg^2\alpha$ б) $\frac{cos(8\pi-\alpha)tg(3\pi-\alpha)}{sin(6\pi-\alpha)ctg(5\pi-\alpha)}=-tg\alpha$
3. Вычислить	
а) $5\sin720^0+4\cos810^0-2\sin900^0+3\cos630^0$ б) $\sin^3\left(-\frac{9\pi}{4}\right)+cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$	а) $2\sin1080^0-2\cos1500^0+ctg930^0$ б) $5\,tg^3\left(-\frac{10\pi}{3}\right)+ctg\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. Упростить выражение:	
а) $(1+sin\alpha)(tg\alpha+ctg\alpha)(1-sin\alpha)$ б) $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}+\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}$ в) $\cos(\alpha-4\pi)\sin(\alpha-8\pi)tg(\alpha-13\pi)$	а) $cos^4\alpha+sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha+sin^2\alpha$ б) $(1+tg\alpha)^2+(1-tg\alpha)^2$ в) $tg(\alpha-\pi)ctg(\alpha-3\pi)\sin^2(\alpha-2\pi)$
2. Доказать тождества	
а) $sin^3\alpha(1+ctg\alpha)+cos^3\alpha(1+tg\alpha)=sin\alpha+cos\alpha$ б) $\frac{sin^2(8\pi-\alpha)}{ctg^2(7\pi+\alpha)+1}=sin^4\alpha$	а) $tg^2\alpha-sin^2\alpha=sin^2\alpha\cdot tg^2\alpha$ б) $\frac{ctg(13\pi-\alpha)+tg(4\pi+\alpha)}{tg(5\pi+\alpha)-ctg(7\pi+\alpha)}=1$
3. Вычислить	
а) $tg^2600^0+ctg^2585^0+3$ б) $4\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)ctg\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	а) $2tg945^0-4\cos1500^0-\sin1170^0$ б) $2\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)ctg\left(\frac{15\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

Вычисление тригонометрических функций по заданной функции. Доказательство тождеств. Применение формул приведения для доказательства тождеств.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Формулы соотношения тригонометрических функций одного аргумента

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$tg\alpha$	$\frac{tg\,\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$tg\alpha$	$\frac{1}{tg\,\alpha}$
$ctg\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{ctg\,\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{1}{ctg\,\alpha}$	$ctg\alpha$

Формулы приведения:

<u>Правило</u>:

1. Если аргумент $(-\alpha)$, $(\pi\pm\alpha)$, $(2\pi-\alpha)$, то функция не изменяется. Если аргументы $(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)$, $(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha)$, то функция заменяется на сходную (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот)
2. Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находят по знаку левой части в предположении, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$

$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\alpha\pm\pi$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

<table>
<tr><th>ВАРИАНТ 1</th><th>ВАРИАНТ 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Представьте выражение в виде тригонометрической функции угла α</td></tr>
<tr><td>а) cos $(180^0-\alpha)$
б) $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$</td><td>а) sin $(360^0-\alpha)$
б) $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вычислить значение тригонометрической функции, представив аргумент в виде острого угла</td></tr>
<tr><td>а) $\sin 210^0$
б) $ctg\left(\frac{3\pi}{4}\right)$</td><td>а) $\cos 300^0$
б) $tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Упростить выражение</td></tr>
<tr><td>$ctg(\pi-\alpha)cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$</td><td>$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)sin(\pi-\alpha)+cos(\pi+\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Известно, что</td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha=\frac{8}{17}$ и $90^0<\alpha<180^0$. Найдите $\cos\alpha$</td><td>$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ и $180^0<\alpha<270^0$. Найдите $\sin\alpha$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ВАРИАНТ 3*</th><th>ВАРИАНТ 4*</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Упростить выражение</td></tr>
<tr><td>а) $sin(90^0+\alpha)+cos(360^0-\alpha)$
б) $tg(\pi+\alpha)-ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$</td><td>а) $sin(270^0-\alpha)-cos(180^0+\alpha)$
б) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+ctg(2\pi-\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Найдите значение выражения</td></tr>
<tr><td>а) $\sin 840^0$
б) $ctg\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
в) $\cos 1020^0$
г) $tg\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$</td><td>а) $\cos(-600^0)$
б) $tg\left(\frac{15\pi}{4}\right)$
в) $\sin(-690^0)$
г) $ctg\left(\frac{21\pi}{4}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Доказать тождество</td></tr>
<tr><td>$\frac{sin(\pi-\alpha)-ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(-\alpha)}=tg(\pi+\alpha)$</td><td>$\frac{cos(2\pi-\alpha)-tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin(-\alpha)}=ctg(\pi+\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Известно, что</td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha=0,8$ и $270^0<\alpha<360^0$.Найдите $ctg(90^0-\alpha)$</td><td>$\sin\alpha=0,6$ и $90^0<\alpha<180^0$.Найдите $tg(180^0+\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если</td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha=\frac{15}{17}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$</td><td>$\cos\alpha=\frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$</td></tr>
</table>

Формулы сложения. Применение формул двойного аргумента. Доказательство тождеств. Вычисление тригонометрических функций

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Формулы сложения

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\,\alpha\cdot ctg\,\beta\mp 1}{ctg\,\beta\pm ctg\,\alpha}$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

2. Формулы двойного аргумента

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha \cdot -1}{2\,ctg\,\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

3. Формулы половинного аргумента

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$,

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$,

$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. Выражение тригонометрических функций через $tg\dfrac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2\,tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2\,tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,tg\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k$$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Дано $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$, $\alpha \in I$ четверти, $\beta \in III$ четверти. **Найти:**			
Вариант 1.	**Вариант 2.**	**Вариант 3.**	**Вариант 4.**
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$	$\sin(\alpha-\beta)$	$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$	$\cos(\alpha+\beta)$

2. Упростить	
Вариант 1.	**Вариант 2.**
$\sin(x+45^0)\cos(x-45^0) - \cos(x+45^0)\sin(x-45^0)$	$\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x$
Вариант 3.	**Вариант 4.**
$\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{21} - \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{21}$	$\sin 20^0\cos 5^0 - \cos 20^0\sin 5^0$
3. Вычислить	
Вариант 1.	**Вариант 2.**
а) $\sin\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 2$	а) $\cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 3$
б) $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	б) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
Вариант 3	**Вариант 4.**
а) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$	а) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}$
б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	б) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
4. Вычислить	
Вариант 1	**Вариант 2**

$\sin 22^0 \cos 23^0 + \cos 22^0 \sin 23^0$	$\cos 40^0 \cos 20^0 - \sin 40^0 \sin 20^0$
Вариант 3.	**Вариант 4.**
$\cos 100^0 \cos 10^0 + \sin 100^0 \sin 10^0$	$\sin 65^0 \cos 5^0 - \cos 65^0 \sin 5^0$
5. Доказать	
Вариант 1.	**Вариант 2.**
$\frac{2 tg\, \alpha}{1 - tg^2 \alpha} \cdot 3 \cdot ctg\, 2\alpha = 3$	$2 \sin 2\alpha \cdot \frac{1 - tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} = \sin 4\alpha$
Вариант3.	**Вариант 4.**
$1 + \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha = 2$	$\frac{2 tg\, \alpha}{1 + tg^2 \alpha} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

Тождественные преобразования тригонометрических выражений (Преобразование произведений в сумму и обратно)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Преобразование произведения в сумму

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right].$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right].$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

$$tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta} = -\frac{tg\alpha - tg\beta}{ctg\alpha - ctg\beta}$$

$$ctg\alpha \cdot ctg\beta = \frac{ctg\alpha + ctg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = -\frac{ctg\alpha - ctg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\beta = \frac{tg\alpha + ctg\beta}{ctg\alpha + tg\beta} = -\frac{tg\alpha - ctg\beta}{ctg\alpha - tg\beta}$$

2. Преобразование суммы в произведение

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\mathbf{ctg}\,\alpha \pm \mathbf{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$$\mathbf{tg}\,\alpha - \mathbf{ctg}\,\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

$$\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{ctg}\,\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$

Содержание работы

1. Преобразовать в произведение

Вариант 1.

а) cos 50° + cos 20°;

б) tg 15° + tg 17°;

в) sin (x + α) + sin (x — α);

г) $\frac{tg(\alpha + 15^\circ) + tg(\alpha - 15^\circ)}{tg(\alpha + 15^\circ) - tg(\alpha - 15^\circ)}$

Вариант 2.

а) sin 28° + sin 12°;

б) tg 5π/12 — tg 2π/5;

в) ctg 24° + ctg 16°;

г) $\frac{tg(45^\circ + \alpha) - tg(45^\circ - \alpha)}{ctg(45^\circ + \alpha) + ctg(45^\circ - \alpha)}$;

Вариант 3

а) cos 16° — cos 36°;

б) ctg 5π/24 + tg 3π/8

Вариант 4.

а) sin 5° — sin 3°;

б) ctg2α — ctg2β;

в) tg (x + α) + tg (x — α);

г) $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$

в) cos (α — β) — cos (α + β).

г) $\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$.

2.Преобразовать в сумму

Вариант 1.
а) sin 45° sin 15°;
б) 2 sin(x+α) cos(x-α)

Вариант 2.
а) cos 50° cos 15°;
б) 4 sin16α sin4α

Вариант 3.
а) tg15° tg20°;
б) $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$

Вариант4.
а) ctg40° ctg55°;
б) cos7x cos5x

3. Доказать тождества.

Вариант 1.

а) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin (\beta + \alpha)}$.

б) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg} (45^\circ - \alpha)$.

Вариант 2.

а) $\frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$;

Вариант 3

а) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta)}$;

б) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)$;

Вариант 4.

а) $\frac{\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg} \alpha$.

б) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$.

4. Следующие выражения преобразовать в произведения введением вспомогательного угла:

Вариант1.
а) 1 + 2cos α;
б) 1 ± tg α;

Вариант2.
а) 1 + 2 sin α;
б) 1 — ctg2 α.

Вариант3.
а) 1 — 2 cos α;
б) 1 ± ctg α;

Вариант4.
а) 1 — 2sin α.
б) 1 — tg2 α

Раздел I. Алгебра

4. Функции, их свойства и графики

Определение четности и нечетности функции.
Нахождение обратной функции

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Областью определения функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение. Обозначается: **D(f)**

Областью значения функции называется множество всех действительных значений функции y , которые она может принять. Обозначается: **E(f)**

Виды функций:

1) f(x)=p(x), p(x) – многочлен, тогда f(x) - целая рациональная функция. **D(f)=R** (если не указывается дополнительно)

2) f(x)=$\frac{p(x)}{q(x)}$, q(x), p(x) – многочлены, тогда f(x) - дробно-рациональная функция. **D(f)=R/{q(x)=0}.**

Функция f с областью определения D называется **периодической**, если существует число T $\neq$ 0: для любого x$\in$ D числа (x-T) и (x+T) $\in$ D и выполняется равенство $\boxed{f(x-T)= f(x+T)=f(x).}$ T называется **периодом** функции.

График периодической функции “повторяет” себя через промежуток длины T_0, равной наименьшему положительному периоду. *Примечание*: *достаточно построить график на любом промежутке вида* $a \le x \le a + T_0$ *и сместить построенный участок на отрезок длины* T_0.

Числовая функция называется **возрастающей**, если $\forall x_1, x_2 \in D$: $x_1<x_2$ выполняется неравенство: $f(x_1)<f(x_2)$ или $\boxed{f(x_1)-f(x_2)<0}$

Числовая функция называется **убывающей**, если $\forall x_1, x_2 \in D$: $x_1<x_2$ выполняется неравенство: $f(x_1)>f(x_2)$ или $\boxed{f(x_1)-f(x_2)>0}$

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными**, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает – **промежутками монотонности**.

Если проходя через точку $x=x_0$ функция y=f(x) меняет возрастание на убывание (т.е. для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство: $\boxed{f(x) \le f(x_0)}$), то точка x_0 называется **точкой максимума (**обозн. $\mathbf{x_{max}}$**)**, а значение функции в этой точке - **максимумом функции (**обозн. $\mathbf{y_{max}}$**)**.

Если проходя через точку $x=x_0$ функция y=f(x) меняет убывание на возрастание (т.е. для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство: $\boxed{f(x) \ge f(x_0)}$), то точка x_0 называется **точкой минимума (**обозн. $\mathbf{x_{min}}$**)**, а значение функции в этой точке - **минимумом функции (**обозн. $\mathbf{y_{min}}$**)**.

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**, а значения функции в точках экстремума – **экстремумами функции**.

Функция f с областью определения D называется **четной**, если для любого $x \in D$ значение $-x \in D$ и выполняется равенство $\boxed{f(-x)=f(x)}$. ***График четной функции*** симметричен относительно оси OY.

Функция f с областью определения D называется **нечетной**, если для любого $x \in D$ значение $-x \in D$ и выполняется равенство $\boxed{f(-x)= -f(x)}$. ***График нечетной функции*** симметричен относительно начала координат.

Все остальные функции не являются ни четными и ни нечетными.

Если функция принимает каждое свое значение только при единственном значении x, то такую функцию называют **обратимой**.

Дано: y=f(x).

1. Решим это уравнение относительно x: $x=\varphi(y)$, где *y* – аргумент, x – функция.
2. Поменяем местами x, y.
3. Получим $y=\varphi(x)$

Функция $y=\varphi(x)$ называется **обратной** к y=f(x). Обозначается f^{-1}.

$D(f^{-1})=E(f)$, $E(f^{-1})=D(f)$

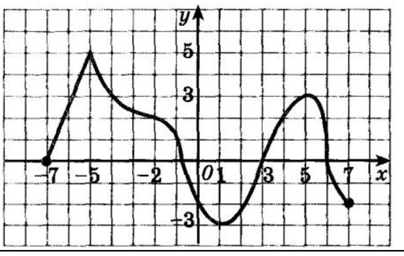
График обратной функции $y=\varphi(x)$ симметричен графику y=f(x) относительно прямой y=x (биссектриса I и III координатных четвертей).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

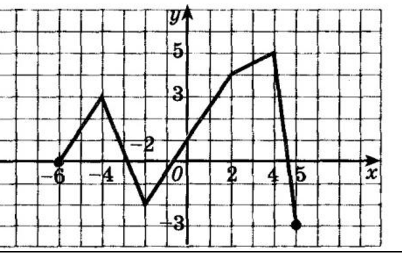
ЗАДАНИЕ 1. Найти f(5), f(-1), $f\left(\frac{1}{3}\right)$, f(-2,1), если	
Вариант 1. $f(x)=x^3-0,5$	**Вариант 2**. $f(x)=\frac{3}{x-1}$
Вариант 3. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$	**Вариант 4**. $f(x)=3x^2-5x+1$
ЗАДАНИЕ 2. Найти область определения функции:	
Вариант 1. $y=5\cdot\sqrt{2-x}$	**Вариант 2**. $y=\frac{5}{2-x}$
Вариант 3. $y=\frac{\sqrt{x+3}}{2}$	**Вариант 4**. $y=\frac{3x}{x+4}$
ЗАДАНИЕ 3. Определить четность и нечетность функций:	
Вариант 1.а) $f(x)=x^2-5$ б) $y=\frac{x-3x^5}{x^4+1}$	**Вариант 2**. а) $f(x)=x+1$ б) $y=\frac{x}{x^6-4}$
Вариант 3. а) $f(x)= -x^2$ б) $y=\frac{x-3}{3x^3-5}$	**Вариант 4**. а) $f(x)=x^3+x$ б) $y=\frac{x-1}{x^7+1}$
ЗАДАНИЕ 4. Найти функцию обратную данной и построить ее график	
Вариант 1. $y=\frac{2x-3}{4}$	**Вариант 2**. $y=\frac{3x+2}{3}$
Вариант 3. $y=\frac{4x+2}{4}$	**Вариант 4**. $y=\frac{0,5x-3}{3}$

ЗАДАНИЕ 5. Для функций, изображенных на графике, определить:
а) промежутки монотонности
б) точки экстремума и экстремумы функции
в) наибольшее и наименьшее значения функции

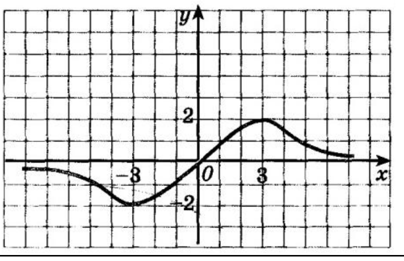
Вариант 1.



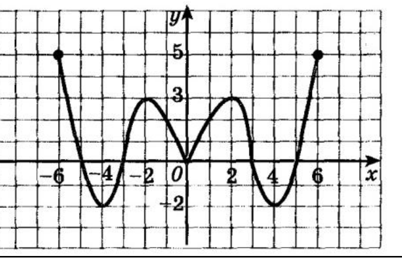
Вариант 2.



Вариант 3.

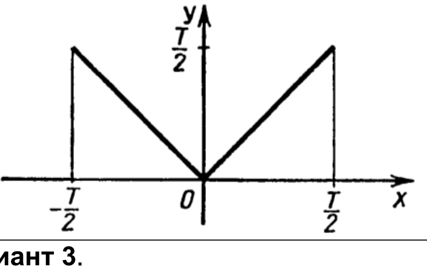


Вариант 4.

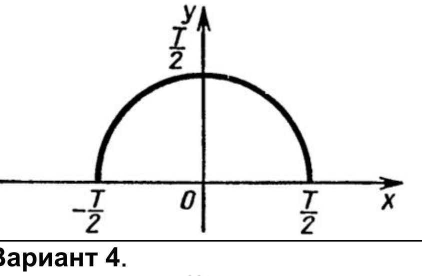


ЗАДАНИЕ 6. На рисунке изображена часть графика функции, имеющей период Т. Постройте график этой функции на промежутке [-1,5Т;2,5Т]

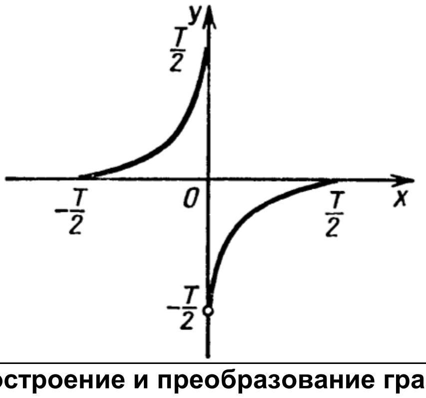
Вариант 1.



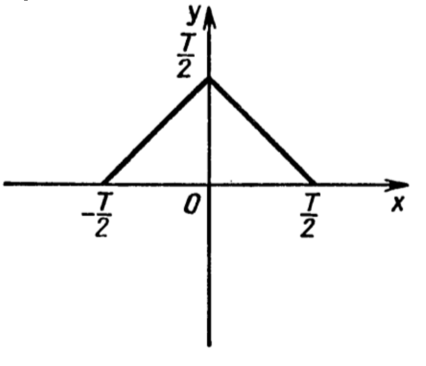
Вариант 2.



Вариант 3.

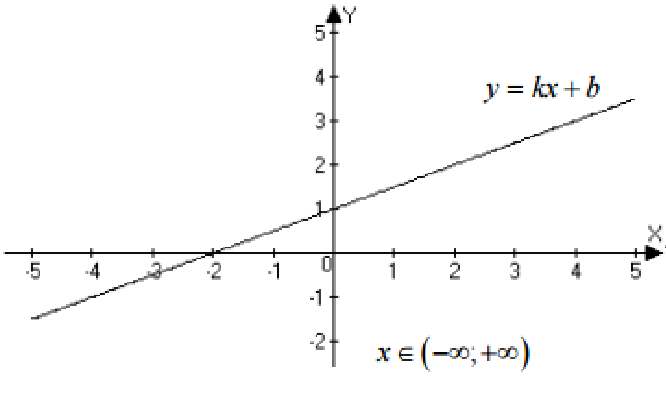


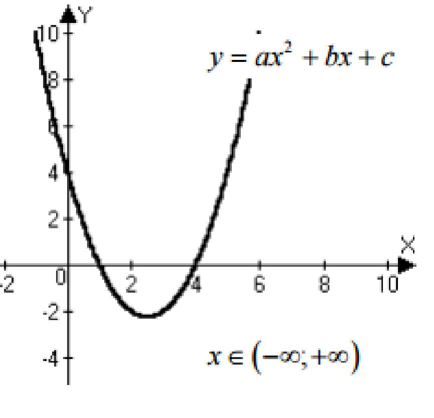
Вариант 4.

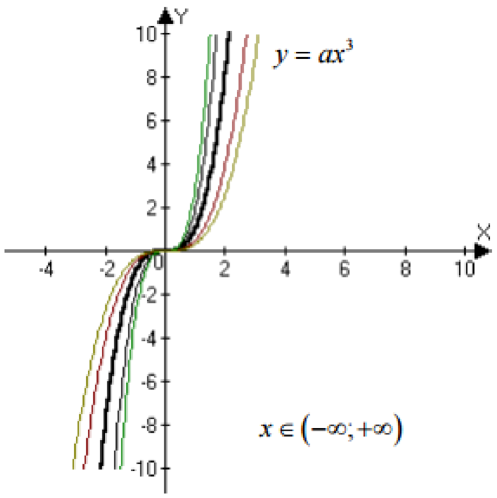


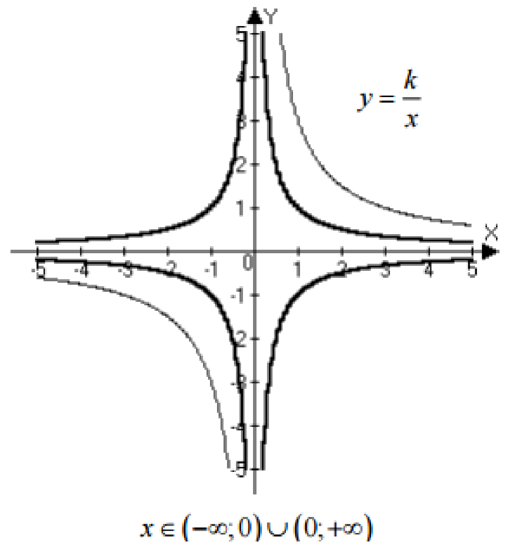
Построение и преобразование графиков функции

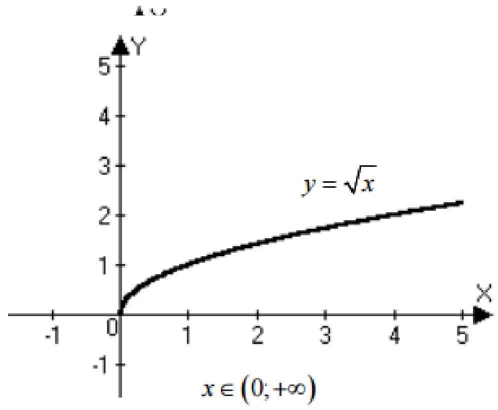
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ











Для построения графика функции $y = |b \pm k \cdot f(a \cdot x + \varphi)|$ необходимо сначала представить функцию в виде: $y = |b \pm k \cdot f(a(x + n))|$, где k>0, a>0, $n = \frac{\varphi}{a}$, затем выполнить следующие преобразования:

1. y=f(x)
2. y=f$(x + n)$: если n<0, то графика y=sinx смещается вдоль ОХ вправо на n единиц; если n>0, то влево на n единиц.
3. y=f$(a(x + n))$, если 0<a<1, то график функции y=f$(x + n)$ сжимается вдоль ОХ в *a* раз; если a>1, то растягивается вдоль ОХ в *a* раз.
4. y=k·f$(a(x + n))$: если 0<k<1, то график функции y=f$(a(x + n))$ сжимается вдоль OY в k раз; если k>1, то растягивается вдоль OY в k раз.
5. y=$\pm$ k·f$(a(x + n))$, если перед функцией стоит «-», то график функции y=k·f$(a(x + n))$ зеркально отображается относительно оси Ох.
6. . y=b$\pm$ k·f$(a(x + n))$: если b<0, то графика y=$\pm$ k·f$(a(x + n))$ смещается вдоль OY вниз вправо на b единиц; если b>0, то вверх на b единиц
7. $y = |b \pm k \cdot f(a(x + n))|$: зеркально отобразить относительно оси ОХ те части графика y=b$\pm$ k·f$(a(x + n))$, которые расположены ниже этой оси

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Построить схематически графики функций:

ЗАДАНИЕ 1. Для функции y=x^2 построить график функции (в одной системе координат), описав предварительно преобразования.

Вариант 1. y=x^2-2
Вариант 2. y=$(x+3)^2$
Вариант 3. y=2x^2
Вариант 4. y=-x^2
Вариант 5. y=$(x-3)^2$
Вариант 6. y=x^2+2

Дополнительно

Вариант 1, 3, 5. y= -$(x-2)^2$-2
Вариант 2, 4, 6. y=2$(x-1)^2$+3

ЗАДАНИЕ 2. Для функции $y = \frac{1}{x}$ построить график функции (в одной системе координат), описав предварительно преобразования.

Вариант 1. $y = \frac{1}{x+1}$
Вариант 2. $y = \frac{1}{x} + 3$

Вариант 3. $y=\frac{1}{x}-2$

Вариант 4. $y=\frac{1}{2x}$

Вариант 5. $y=-\frac{1}{x}$

Вариант 6. $y=\frac{2}{x}$

Дополнительно

Вариант 1, 3, 5. $y=\frac{1}{x-3}+2$

Вариант 2, 4, 6. $y=\frac{1}{x+2}-1$

ЗАДАНИЕ 3. Для функции $y=|x|$ построить график функции (в одной системе координат), описав предварительно преобразования

Вариант 1. y =| x –3|

Вариант 2. y =| 0,5x |

Вариант 3. y =| x +3|

Вариант 4. y =| -1,2x |

Вариант 5. y =| -2x|

Вариант 6. y =| 5-x|

Дополнительно

Вариант 1, 3, 5. $y=\frac{1}{x-3}+2$

Вариант 2, 4, 6. $y=\frac{1}{x+2}-1$

ЗАДАНИЕ 4. Для функции $y=\sqrt{x}$ построить график функции (в одной системе координат), описав предварительно преобразования

Вариант 1. $y=\sqrt{x+2}$

Вариант 2. $y=\sqrt{2x}$

Вариант 3. $y=\sqrt{3-x}$

Вариант 4. $y=\sqrt{\frac{1}{2}x}$

Вариант 5. $y=\sqrt{x-4}$

Вариант 6. $y=\sqrt{3+x}$

Дополнительно

Вариант 1, 3, 5. $y=|10-(3-x)^2|$

Вариант 2, 4, 6 $y=|2\cdot x^2-10|$

Раздел I. Алгебра и начала математического анализа

5. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции

Построение графиков функций с помощью преобразований.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для построения графика функции y=|b±k· $sin\left(ax+\varphi\right)$| необходимо сначала представить функцию в виде: y=$\left|b\pm k\sin\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)\right|$, где k>0, a>0, затем выполнить следующие преобразования:

1. y=sin(x)
2. y=sin$\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)$: если $\frac{\varphi}{a}$<0, то графика y=sinx смещается вдоль OX вправо на $\frac{\varphi}{a}$ единиц; если $\frac{\varphi}{a}$>0, то влево на $\frac{\varphi}{a}$ единиц.
3. y=sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$, если 0<a<1, то график функции y=sin$\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)$ сжимается вдоль OX в *a* раз; если a>1, то растягивается вдоль OX в *a* раз.
4. y=k·sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$: если 0<k<1, то график функции y=sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$ сжимается вдоль OY в k раз; если k>1, то растягивается вдоль OY в k раз.
5. y=$\pm$ k·sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$, если перед функцией стоит «-», то график функции y=k·sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$ зеркально отображается относительно оси Ox.
6. . y=b$\pm$ k·sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$: если b<0, то графика y=$\pm$ k·sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$ смещается вдоль OY вниз вправо на b единиц; если b>0, то вверх на b единиц
7. $y=\left|b\pm k\cdot sin\left(a(x+\frac{\varphi}{a})\right)\right|$: зеркально отобразить относительно оси OX те части графика y=b$\pm$ k·sin$\left(a\left(x+\frac{\varphi}{a}\right)\right)$, которые расположены ниже этой оси

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Построить графики функций:

Вариант 1. y=3sin0,5(x+$\frac{\pi}{2}$) **Вариант 2.** y=-sin2(x+$\frac{\pi}{3}$)

Вариант 3. y=2sin4(x+$\frac{\pi}{3}$) **Вариант 4.** y= -3sin2(x-$\frac{\pi}{6}$)

Вариант 5. y=2sin0,5(x+$\frac{\pi}{6}$) **Вариант 6**. y= -3sin(x-$\frac{\pi}{2}$)

ЗАДАНИЕ 2 (доп).: $y = \left|3 - 4cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$

Раздел II. Начала математического анализа.

1. Рациональные уравнения и неравенства, их системы

Решение уравнений и неравенств. Решение систем линейных уравнений

Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Л. Н. Толстой

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Решение неравенств методом промежутков (интервалов)

Если левую часть неравенства можно разложить на линейные множители, то его можно решить методом интервалов. Для решения необходимо на числовую прямую нанести все точки, в которых функция превращается в 0 или претерпевает разрыв. Эти точки разбивают прямую на несколько интервалов, внутри каждого функция сохраняет свой знак. Знак может измениться только при переходе через корни сомножителей.

2. Определители

Определитель первого порядка равен элементу матрицы.

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Решение систем ураdнений

Решение систем уравнений с помощью определителя **(методом Крамера)**:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

1. Составляем и находим определитель из коэффициентов перед переменными:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. Составляем и находим дополнительные определители следующим образом

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

3.Находим решение по формуле Крамера:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$$

Условия определителей		**Решение системы**	**Условия для коэффициентов:**
Система из двух уравнений с двумя неизвестными			
$\Delta = 0$	$\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$	**несовместная** (не имеет решений)	$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$

	$\Delta_x = , \Delta_y = 0$	**неопределенная** (бесконечное множество решений)	$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$
Система из трех уравнений с тремя неизвестными			
$\Delta \neq 0$		система **определенная** (имеет единственное решение)	
$\Delta = 0$		или несовместная или неопределенная	
Если система однородная (bi=0),			
$\Delta \neq 0$		система определенная	x=y=z=0
$\Delta = 0$		система неопределенная	

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Решить уравнение:

Вариант 1.

а) $x^2 - 2x - 8 = 0$

б) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 0$

Вариант 2.

а) $x^2 + 2x - 15 = 0$

б) $\frac{6}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} + \frac{x^2}{x^2-4} = 0$

Вариант 3.

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$

б) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} - 2 = 0$

Вариант 4.

а) $x^2 + 8x + 12 = 0$

б) $\frac{x-3}{2x+1} + \frac{2x-1}{4x-3} - 1 = 0$

2. Решить систему уравнений:

Вариант 1. $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 30 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$

Вариант 3 $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -35 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$

3. Решить систему уравнений методом Крамера и сделать проверку, решив систему сложением или подстановкой:

Вариант 1. $\begin{cases} x + 7y = 3 \\ 3x - 2y = 32 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} 4x - 3y = 23 \\ 3x + 11y = 4 \end{cases}$

Вариант 3 $\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 9x - 2y = -31 \end{cases}$

4. Решить неравенства:

Вариант 1.

а) $(x+3)(x-2) > 0$

б) $\frac{5x+4}{7+2x} \leq 0$

Вариант 2.

$(x-5)(x+1) \geq 0$

б) $\frac{x-1}{x+3} < 0$

Вариант 3.

$(x-1)(x+5) \leq 0$

б) $\frac{6x-8}{4x+3} > 0$

Вариант 4.

$(x+2)(x-6) < 0$

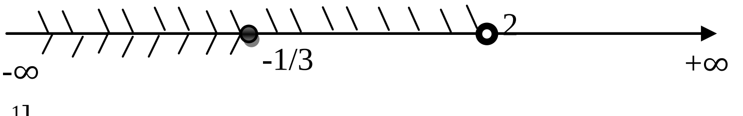
б) $\frac{2x-3}{x+4} \geq 0$

5. На основе рассмотренного примера решить систему неравенств.

ПРИМЕР. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x - 3 < 2x + 1 \\ -10x + 3 \geq 8 + 5x \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: $\begin{cases} 4x - 2x < 1 + 3 \\ -10x - 5x \geq 8 - 3 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x < 4 \\ -15x \geq 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x < 2 \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$

Вариант 1. $\begin{cases} 2(x-3) > 3 - x \\ 7x - 5 \leq 4x + 10 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} (17 - 2x) \geq 3x + 11 \\ 5x + 15 < 2x - 1 \end{cases}$

Вариант 3 $\begin{cases} 5x + 4 \leq 2(x-1) \\ 2 - x < 3x + 2 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} 3x + 11 \geq 2 - x \\ 4 - x < 5x + 4 \end{cases}$

Решение задач

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Решение задач с помощью уравнений (систем уравнений) состоит из **трех этапов**:

1. построение математической модели (обозначить через х и у - неизвестные величины);
2. составление уравнений (системы двух уравнений);
3. решение уравнения (системы) и нахождение ответа к задаче.

Задачи на движение

Основными компонентами этого типа задач являются:
а) пройденный путь (S);
б) скорость (V);
в) время (t).
Зависимость между указанными величинами выражается известными формулами:

$$S = v \cdot t, \quad v = \frac{S}{t}, \quad t = \frac{S}{v} \qquad (1)$$

Все указанные величины должны быть в одной системе единиц.

План решения сводится к следующему:

а) выбираем одну из величин, которая по условию задачи является неизвестной, и обозначаем ее через x, y или z;

б) устанавливаем, какая из величин по условию задачи является известной;

в) третью (из оставшихся) величин выражают через неизвестную (X) и известную с помощью одной из формул (1);

г) составляем уравнение на основании условий задачи, в котором указано, как именно изменилась третья величина.

Если два каких-либо тела **начинают движение одновременно**, то в случае, если они встречаются, каждое с момента выхода и до встречи затрачивает, очевидно, одинаковое время. Аналогично и в случае, если **одно тело догоняет другое**.

Если тела **выходят в разное время,** то до момента встречи из них затрачивает времени больше то, которое выходит раньше

В задачах на **движение по реке** необходимо помнить следующие формулы:

$$V_{по\ теч.} = V_{соб.} + V_{теч.};$$

$$V_{против\ теч.} = V_{соб.} - V_{теч.};$$

$$V_{соб} = \frac{V_{по\ теч} + V_{против\ теч}}{2}$$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Старик Кокованя приютил у себя сироту. Девочка Даренка была смышленая и чудная. Встретилась она с волшебным козлом, которого прозвали Серебряное копытце. При каждой встрече с ним можно было собрать много каменьев. При первой встрече Даренка собрала два мешочка гранатов и три мешочка малахита, всего 1300 гр. А при второй встрече один мешочек гранатов и два мешочка малахита, всего 800 грамм. Сколько грамм самоцветов содержится в каждом мешочке с малахитом и в каждом мешочке с гранатом?
2. Разность катетов прямоугольного треугольника равна 23 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь треугольника.
3. Известно что, два карандаша и три тетради стоят 35 рублей, а две тетради и три карандаша стоят 40 рублей. Необходимо выяснить, сколько стоят пять карандашей и шесть тетрадей.
4. Расстояние между двумя деревнями на реке 30км. Это расстояние моторная лодка проходит по течению реки за 1ч 30мин, а против течения за 2ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения.
5. Легковой автомобиль за 3,5 часа проехал то же расстояние, что и грузовой за 5 часов. Найдите их скорости, если известно, то легковой автомобиль двигался на 30 км/ч быстрее грузового.
6. Из города А в 9 часов утра выехал велосипедист и двигался с постоянной скоростью 12 км/ч. Спустя 2 часа вслед за ним из А выехал мотоциклист, который при начальной скорости 22 км/ч двигался равнозамедленно, так, что за час его скорость уменьшается на 2 км/ч. Автомобилист, едущий им навстречу в город А с постоянной скоростью 50 км/ч, сначала встретил мотоциклиста, а потом велосипедиста. Успеет ли автомобилист к 19 часам этого дня прибыть в город А?
7. Первый турист, проехав 1,5 часа на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

Решение иррациональных уравнений и неравенств

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Иррациональные уравнения

№	Уравнение	Решение
1	$\sqrt{A(x)} = B(x)$	$\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge 0 \\ A(x) = (B(x))^2 \end{cases}$
2	$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$	$\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$

2. Иррациональные неравенства.

№	Неравенство	Решение		Неравенство	Решение
1	$\sqrt{A(x)} \le B(x)$	$\begin{cases} A(x) \le B^2(x) \\ A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \end{cases}$	4	$\boxed{\sqrt{A(x)} > B(x)}$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge 0 \\ A(x) > (B(x))^2 \end{cases} \\ \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$
2	$\boxed{\sqrt{A(x)} < B(x)}$	$\begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \ge 0 \\ A(x) < (B(x))^2 \end{cases}$	5	$\boxed{\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}}$	$\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$
3	$\sqrt{A(x)} \ge B(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) \ge B^2(x) \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$	6	$\boxed{\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}}$	$\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) > 0 \\ A(x) \ge B(x) \end{cases}$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Решить уравнения:	
Вариант 1	**Вариант 2**
а) $\sqrt{2x - 5} = 2$	а) $\sqrt{3x + 8} = 4$
б) $x + \sqrt{25 - x^2} = 7$	б) $16 - \sqrt{\frac{2}{3}x} = 12$
в) $\sqrt{x^2 - 12} - x = 1$	в) $\sqrt{9x^2 - 1} + 5 = 3x$
г) $\sqrt{7x - 4} - \sqrt{6x - 3} = 0$	г) $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{4x - 11} = 0$
д) $\sqrt{1 - x} = \sqrt{6 - x} - \sqrt{-2x - 5}$	д) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} = \sqrt{2x - 8}$
Вариант 3	**Вариант 4**
а) $\sqrt{4 - 2x} = 3$	а) $\sqrt{5 - 2x} = 1$
б) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$	б) $x + \sqrt{x + 1} = 11$
в) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} - 2x = -1$	в) $\sqrt{17 + 2x - 3x^2} - 1 = x$

г) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2}=0$	г) $\sqrt{3x-1}-\sqrt{4-x}=0$
д) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}=\sqrt{8x-7}$	д) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}$
2. Решить неравенства:	
Вариант 1	**Вариант 2**
а) $\sqrt{x^2-5}\le 2$	а) $\sqrt{x^2-16}\ge 1$
б) $\sqrt{2x+1}\ge 1-x$	б) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$
в) $\sqrt{20-x}-\sqrt{10-x}>2$	в) $\sqrt{2x+1}\le\sqrt{3-x}$
Вариант III	**Вариант IV**
а) $\sqrt{x^2-6x+9}<3$	а) $\sqrt{(x-2)(1-2x)}>-1$
б) $\sqrt{3x-7}\ge x-1$	б) $\sqrt{x^2+4x}\le 2-x$
в) $\sqrt{3x+1}>\sqrt{2-x}$	в) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8}\ge 3$

Критерий оценки

Оценки	5	4	3
задания	4 из №1	3 из №1	2 из №1
	2 из №2	2 из №2	1 из №2

Решение показательных и логарифмических уравнений

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Решение уравнений сводятся к решению уравнения вида

$a^x=a^b$, | $\log_a x=\log_a b$

т.е. представляем обе части уравнения с одним и тем же основанием в виде

степени | логарифма

При решении показательных уравнений <u>**проверка не делается**</u>, т.к. область определения показательной функции – все действительные числа

При решении логарифмических уравнений <u>**проверка делается**</u>, т.к. область определения логарифмической функции –положительные действительные числа

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Решить уравнения:

Вариант 1.

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2}=1$

2) lg(x+4)-lg(x-3)=lg8

3) $(\log_2 x)^2-\log_2 x=\log_2 x+3$

4) 5x+1+5x=750

5) $\log_2 x+\log_8 x=8$

Вариант 2.

1) $5^{x^2-8x+12}=1$

2) lg(x+2)-lg5=lg(x-6)

3) $(\log_2 x)^2-6\log_2 x=-8$

4) $2^x-2^{x-2}=3$

5) $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=14$

Вариант 3.

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

2) lg(x-2)+lgx=lg8

3) $(\log_4 x)^2-\log_4 x=4-\log_4 x$

4) $3^{x+1}+3^x=108$

5) $\log_3 x+\log_9 x=9$

Вариант 4.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2}=27$

2) lg2x+lg(x+3)=lg(12x-4)

3) $(\log_3 x)^2-2\log_3 x=6-3\log^3 x$

4) $7^x+7^{x+2}=2450$

5) $\log_5 x+\log_{75} x=4$

ЗАДАНИЕ 2. Решить задачу:

Вариант 1, 3

Через сколько минут радиоактивного распада от массы M_0 =30 мг радия С останется М=15 мг, если его период полураспада равен Т=15 мин?

Вариант 2, 4

Найти период Т полураспада радия А, если через t =3 мин распада от M_0 =48 мг осталось М=3 мг радия А.

М - масса оставшегося вещества, M_0 — количество вещества к началу распада, Т — период полураспада: $M=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

Решение показательных и логарифмических неравенств

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Показательные

1) $a^x>c$:

<u>1 случай:</u> a>1, то переходим к неравенству: <u>$x>\log_a c$</u>

<u>2 случай:</u> 0<a<1, то переходим к неравенству:$x<$ <u>$\log_a c$</u>

Логарифмические

1) $\log_a x>c$

<u>1 случай:</u> a>1, то переходим к неравенству: <u>$x>a^c$</u>

<u>2 случай:</u> 0<a<1, то переходим к неравенству: <u>$0<x<a^c$</u>

2) $\log_a x<c$

2) $a^x < c$

1 случай: a>1, то переходим к неравенству: $x < \log_a c$

2 случай: 0<a<1, то переходим к неравенству: $x > \log_a c$

3) $f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)}$

1 случай: $\begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x) \end{cases}$

2 случай: $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x) \end{cases}$

1 случай: a>1, то переходим к неравенству: $0 < x < a^c$

2 случай: 0<a<1, то переходим к неравенству: $x > a^c$

3) $\log_{f(x)} \varphi_1(x) > \log_{f(x)} \varphi_2(x)$

1. случай: $\begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi_1(x) > 0 \\ \varphi_2(x) > 0 \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x) \end{cases}$

2. случай: $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ \varphi_1(x) > 0 \\ \varphi_2(x) > 0 \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x) \end{cases}$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Решить неравенства	
Вариант 1.	**Вариант 2.**
1. $\log_{0,5}(2-5x) \le -2$	1. $\log_2(4-3x) \le -3$
2. $\log_4(3-4x) \ge -1$	2. $\log_{0,2}(15-2x) \ge -2$
3. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x}} < \sqrt{\frac{3}{7}}$	3. $(0,04)^{5x-x^2-8} < 625$
4. $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$	4. $(\log_2(x-1))^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$
5. lg x+lg(x+5)=lg6	5. lg x+lg(x+7)=lg8
Вариант 3.	**Вариант 4.**
1. $\log_{0,8}(3-5x) \ge 0$	1. $\log_2(x^2+1) > 2$
2. $\log_{16}(0,6+2x) \ge -0,25$	2. $\log_{0,25}(x-1) > 1$
3. $3^{2x+5} \le 3^{x+2}$	3. $(0,25)^x < \frac{1}{8}$
4. $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$	4. $(\log_2(x-1))^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$
5. lg(x+1)+lg x=lg 6	5. lg(x-2)+lgx=lg8
Вариант 5.	**Вариант 6.**
1. $25 > 5^{\log_5(4-3x)}$	1. $\log_7(x-2) < 4$
2. $\log_{0,2}(2-5x) \ge -2$	2. $6^x > 13$
3. $\frac{1}{5^x} \ge 0,04$	3. $0,4^2 \ge 0,4^{\log_{0,4}(3-2x)}$
4. $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$	4. $(\log_2(x-1))^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$
5. lg(x-2)+lgx=lg3	5. lgx+lg(x-1)=lg6

Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

y=arcsinx, x=siny, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

y=arctgx, x=tgy, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

y=arccosx, x=cosy, $y \in [0; \pi]$

y=arcctgx, x=ctgy, $y \in (0; \pi)$

sin(arcsinx)= x
cos(arccosx)=x
tg(arctgx)=x
ctg(arcctgx)= x

arcsin(-x)= -arcsinx
arccos(-x)= π -arccosx
arctg(-x)= -arctgx
arcctg(-x)= π -arcctgx

Некоторые значения:

x	**-1**	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
arcsinx	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccosx	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	**0**

x	$-\sqrt{3}$	**-1**	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$
arctgx	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctgx	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	**-**	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Решение простейших тригонометрических уравнений, где $k \in Z$

a	**sinx=a**	**cosx=a**	**tgx=a**	**ctgx=a**
a<-1	**Нет решений**		**arctga+** πk	**arcctga+** πk
a=-1	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\pi+2\pi k$	$-\frac{\pi}{4}+\pi k$	$\frac{3\pi}{4}+\pi k$
-1<a<1 (кроме a=0)	**(-1)^{k}arcsina+** πk	$\pm \arccos a+2\pi k$	**arctga+** πk	**arcctga+** πk
a=0	πk	$\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$	πk	$\frac{\pi}{2}+\pi k$
a=1	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$2\pi k$	$\frac{\pi}{4}+\pi k$	
a>1	**Нет решений**		**arctga+** πk	**arcctga+** πk

Решение простейших тригонометрических неравенств, где $k \in Z$

Неравенство		**Решение**		
sinx>a	**sinx≥a**	A+2□k<x<□-A+2□ k	A+2□k≤x≤□-A+2□ k	A=arcsina
sinx<a	**sinx≤a**	-□-A+2□k<x<A+2□ k	-□-A+2□k≤x≤A+2□ k	
cosx>a	**cosx≥a**	-A+2□k<x<A+2□ k	-A+2□k≤x≤A+2□ k	A=arccosa
cosx<a	**cosx≤a**	A+2□k<x<2□-A+2□ k	A+2□k≤x≤2□-A+2□ k	
tgx>a	**tgx≥a**	A+□k<x<$\frac{\pi}{2}$ +□ k	A+□k≤x<$\frac{\pi}{2}$ +□ k	A=arctga
tgx<a	**tgx≤a**	$-\frac{\pi}{2}$+□k<x<A+□ k	$-\frac{\pi}{2}$+□k<x≤A+□ k	
ctgx>a	**ctgx≥a**	□k<x<A +□ k	□k<x≤A +□ k	A=arcctga
ctgx<a	**ctgx≤a**	A+□k<x<□ +□ k	A+□k≤x<□ +□ k	

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. **Записать с помощью обратных тригонометрических функций следующие равенства:**

Вариант 1

cos90^0=0, $ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

Вариант 2

$ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ cos0^0=1

Вариант 3

$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ $sin45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 4

sin30^0=$\frac{1}{2}$ $ctg\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$

2. **Вычислить**

Вариант 1

а) $arccos1+2arcsin\frac{1}{2}$

б) $\sin\left(arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Вариант 2

а) $arcctg1-\frac{\pi}{4}$

б) $\cos\left(2arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Вариант 3	**Вариант 4**
а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	а) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}$ б) $ctg(arctg(-1))$

3. Решить уравнения

Вариант 1	**Вариант 2**
1. sinx= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1. cosx= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. sinx= $-\frac{1}{2}$	2. sinx= $\frac{1}{2}$
3. 4cosx–3cosx=1	3. cosx-sinx-cosx=0
4. tg2x= $\frac{\sqrt{3}}{3}$	4. ctg $\frac{x}{4}$ =0
5. cosx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$	5. -cosx=1
Вариант 3	**Вариант 4**
1. cosx= $-\frac{1}{2}$	1. sinx= $-\frac{1}{2}$
2. cosx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$	2. cosx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. sinx+sinx-sinx=1	3. 4cosx-3cosx=-1
4. tg $\frac{x}{2}$ =-1	4. sin $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. -sinx= $\frac{1}{2}$	5. -ctgx= $-\sqrt{3}$

4. Решить неравенства

Вариант 1.	**Вариант 2.**
sin x < - $\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos x ≤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Вариант 3.	**Вариант 4.**
cos x > - $\frac{\sqrt{2}}{2}$	sin x ≥ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение тригонометрических уравнений и неравенств.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Решите неравенства.

Вариант 1.

1) sin5x ≤ 1
2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{2}$

Вариант 2.

1) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\cos\frac{x}{2} \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Вариант 3.

1) $\cos\frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$
2) sin4x ≥-1

Вариант 4.

1) $\sin 2x < \frac{1}{2}$
2) $\cos\frac{x}{2} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Решить уравнения:

Вариант 1.

1. sin x = -1

Вариант 2.

1. tg x = 0
2. $2\sin^2$x-3sinx+1=0

2. cos $\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$
3. $\sin^2x + \sin x - 1 = 0$
4. $\cos^2x-\cos x-2=0$
5. $\cos^2x-\sin^2x-1-4\cos x=0$
6. $2\cos^2 4x-3-3\cos 4x+1=0$
7. $1+\sin 3x=\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$

8. $2\sin 2x\cdot\sin x-\sin 2x=0$

3. $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$
4. $2\sin^2x - 5\sin x - 2 = 0$
5. $\cos^2x-\sin^2x+8\sin x-3=0$
6. $1-\sin^2 6x-\sin^2 3x-1=0$
7. $2\sin^2 2x=1+\sin 2x$
8. $2\sin 2x\cdot\sin x=2\sin 2x\cdot\cos 2x$

Вариант 3.
1. $\cos x = -1$
2. tg $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$
3. $2\sin^2x - \sin x - 1 = 0$
4. $2-2\cos^2x+7\cos x+2=0$
5. $\cos^2x-\sin^2x+\cos x=0$
6. $-2\sin x+5\cdot 2\sin x\cdot\cos x=0$
7. $\cos x-\cos 3x=2\sin 2x$
8. $2\cdot\frac{1+\cos 8x}{2}-6\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}+1=0$

Вариант 4.
1. ctg $x = -1$
2. $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$
3. $4\sin^2x + 11\sin x - 3 = 0$
4. $\sin^2x-6\sin x+5=0$
5. $\cos^2x-\sin^2x+\sin x=0$
6. $6\,\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x-1=0$
7. $2\sin 2x\cdot\cos x+4\cos^2x=0$
8. $8\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}+4\cdot\frac{1-\cos 8x}{2}-5=0$

РАЗДЕЛ I. Алгебра и начала математического анализа

2. Числовые последовательности

Вычисление пределов функций

ТЕОРЕТИТЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Теоремы о пределах

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)$$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$, $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

Односторонние пределы

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)$ **- правый предел**

$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)$ **- левый предел**

Для установления существования предела необходимо проверить:
1) существование левого предела
2) существование правого предела
3) равенство левого и правого пределов, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$

Бесконечные пределы.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=B$ - **предел функции** y=f(x) **в бесконечности**

ЗАМЕЧАНИЕ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$, с – число, т.е. $\frac{c}{\infty}\to 0$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ - **бесконечный предел функции** y=f(x)

ЗАМЕЧАНИЕ: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{c}{x} = \infty$, с – число, т.е. $\frac{c}{0} \to \infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ - **бесконечный предел функции** y=f(x) **в бесконечности**

Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x} = e$, e=2,7183…

Неопределенности

1) $\frac{0}{0}$ - разложить на множители числитель и знаменатель функции, после чего множитель, дающий в знаменателе 0 сократится.
2) $\frac{\infty}{\infty}$ - каждое слагаемое числителя и знаменателя разделить на x в наибольшей степени и применить замечания.
3) $1^{\infty}, 1^{0}$ - использовать замечательные пределы
4) если функция иррациональная, то необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженное иррациональности (для a+b, сопряженное a-b и наоборот).
5) $(\infty - \infty)$ - привести к общему знаменателю

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ. Найти пределы функции. Полученный ответ найти в таблице ответов.

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 8}{4x^2 - 11x + 2}$
2. $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$
4. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{6 - x}{3 - \sqrt{x + 3}}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 11}{3x^3 + x^2 - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{4x^3 + 4}{x^2 - 1}$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x}$

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 + 3x - 7}$
2. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$
3. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{3x^2 - 17x + 10}{3x^2 - 16x + 5}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{\frac{1}{3}x}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^3 + 64}{8x + 32}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5x)^{\frac{3}{5x}}$

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 4x - 1}{4x^2 - 7x + 2}$
2. $\lim\limits_{x \to -7} \frac{x^2 - 49}{x + 7}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$
4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 - 3x + 1}{x^2 - 8}$
6. $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{2x}}$

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 5x + 2}$
2. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{x - 6}{x^2 - 36}$

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{7x^2 - 4x + 5}{3x^2 - x + 2}$
2. $\lim\limits_{x \to -9} \frac{x^2 - 81}{x + 9}$

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 8x - 12}{x^2 + 12x + 36}$
2. $\lim\limits_{x \to -8} \frac{x + 8}{x^2 - 64}$

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{3x^2 - 13x + 4}$

4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{10 - 2x}{3 - \sqrt{2x - 1}}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 2x + 6}{x^2 + 3x^3 - 11}$

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{3x}\right)^{3x}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x - 2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{150x^2 - x + 6}{3x + 2x^2 + 1}$

6. $\lim\limits_{x \to \sqrt{5}} \dfrac{x^4 - 25}{x^2 - 5}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x}\right)^{2x}$

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 11x - 3}{5x^2 - 16x + 3}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{20x^2 - 5x + 4}{3x^3 + x^2 - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^4 - 9}{x^2 - 3}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x}\right)^{5x}$

Таблица ответов:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	-2	1,3		$\frac{1}{12}$		2	$\sqrt{3}$	e^{-2}
b	12		14		75	$\frac{1}{18}$		e^2
c	$\frac{13}{14}$			6	$-\frac{1}{16}$		-0,1	-3
d		$\frac{1}{16}$	-1,5		-18	10		$e^{\frac{1}{5}}$
e		-6	0		$\frac{1}{3}$		1,5	e^5
f	$\frac{7}{9}$	3	18	27		-14		$e^{\frac{1}{3}}$
g			4	$1\frac{3}{17}$			-0,15	e^3
h	16	$\frac{1}{10}$		другой ответа	$\frac{9}{11}$		∞	$-\frac{1}{12}$

Исследование функции на непрерывность

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Понятие непрерывной функции.

Непрерывность функции в точке означает выполнение условий:

- функция f(x) должна быть определена в точке x_0
- у функции f(x) должен существовать предел в точке x_0
- предел функции f(x) в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке.

Свойства непрерывных функций.

Пусть h(x) и g(x) – непрерывные функции в точке x_0, тогда:

1) f(x)=h(x)+g(x) – непрерывная в точке x_0
2) $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ – непрерывная в точке x_0
3) $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ - непрерывная в точке x_0, если $g(x_0) \neq 0$,
4) Многочлен $f(x)=a_0x^n+ a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+ a_0$ –функция непрерывная на всей числовой прямой
5) Любая дробно-рациональная функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x), Q(x) – многочлены, непрерывна в каждой точке своей области определения.
6) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и на концах его принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка x_0, при которой $f(x_0)=0$

7) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то среди значений, принимаемых на этом отрезке, существует наибольшее и наименьшее значение функции. При этом функция принимает все значения между наибольшим и наименьшим значениями.

Точки разрыва.

Если $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \neq \infty$, то точка *x=a* называется **точкой разрыва I рода**.

Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то точка *x=a* называется **точкой разрыва II рода**.

Функция задана различными аналитическими выражениями

Функция является **непрерывной** при x=a, если выполняются условия:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \neq \infty$$

Если $\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x) \neq \infty$, то точка x=a -*точкой разрыва I рода*

Скачок функции: $k = |\lim\limits_{x\to a-0} f(x) - \lim\limits_{x\to a+0} f(x)|$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Исследовать функцию на непрерывность и построить схематически график

ВАРИАНТ 1

а) $y = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ при } x \geq 2 \\ 6 - 2x \text{ при } x < 2 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -2x \quad \text{при } x \leq 0 \\ x^2 + 1 \text{ при } 0 < x \leq 1 \\ 2 \text{ при } x > 1 \end{cases}$

в) $y = \frac{3}{x^2-1}$

ВАРИАНТ 2

а) $y = \begin{cases} 4x + 5 \text{ при } x \leq -1 \\ x^2 - 4x \text{ при } x > -1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x \quad \text{при } x \leq 0 \\ x^2 - 1 \text{ при } 0 < x < 2 \\ x + 1 \text{ при } x \geq 2 \end{cases}$

в) $y = \frac{5x}{x^2-4}$

ВАРИАНТ 3

а) $y = \begin{cases} 9 - x^2 \text{ при } x < 1 \\ 2x + 2 \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x + 3 \quad \text{при } x \leq -1 \\ x^2 + 4 \text{ при } -1 < x < 1 \\ 2x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$

в) $y = \frac{2x}{1-x^2}$

ВАРИАНТ 4

а) $y = \begin{cases} x^2 + 2x \text{ при } x < 2 \\ 3x - 2 \text{ при } x \geq 2 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x + 2 \quad \text{при } x \leq -1 \\ x^2 - 3 \text{ при } -1 < x \leq 1 \\ 3 - x \text{ при } x > 1 \end{cases}$

в) $y = \frac{3}{9-x^2}$

ЗАДАНИЕ 2. Имеет ли данная функция нули на отрезке [a;b]

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2	ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
$F(x)=x^3+4x^2-x+1$, a=-2, b=1	$F(x)=x^2-2x^3-5$, a=-3, b=2	$F(x)=7x-2x^4-x^2+2$, a=-1, b=2	$F(x)=x^5+2x^2-5x^3-3$, a=-2, b=2

ЗАДАНИЕ 3. Вычислите пределы:

ВАРИАНТ 1.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x^2-3}{5x^3-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-14x+12}{x^3+2x^2-3x}$;

ВАРИАНТ 2.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+3}{3x^4+5x^2+9}$; б) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$;

ВАРИАНТ 3.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5+x^3+2}{1+x-x^2+3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-6}{2x^2-5x-3}$;

ВАРИАНТ 4.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-x^2+x}{2x^3-2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{2x^2+7x-4}{x^2+6x+8}$;

Раздел II. Начала математического анализа.

3. Производная функции

Производная степенной и тригонометрической функций

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

$y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $y' = \lim\limits_{x - x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**

Таблица производных:

a, n – некоторые числа, u, v – некоторые функции

1) $a' = 0$	8) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

2) $x' = 1$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$

5) Ч. сл. $(a \cdot u)' = a \cdot u'$)

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

7) Ч. сл. $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

9) Ч. сл. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10) Ч. сл. $\left(\sqrt[m]{x^n}\right)' = \frac{n}{m \cdot \sqrt[m]{x^{m-n}}}$

11) $(\sin x)' = \cos x$

12) $(\cos x)' = -\sin x$

13) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

14) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
ЗАДАНИЕ 1. Найдите производные функций			
1) $y = x^2 + x^3$	1) $y = x^2 + 3x$	1) $y = x^8 - 3x^4 - x$	1) $y = x^7 - 2x$
2) $y = \sin x + 3$	2) $y = 2\sin x + 3x$	2) $y = 7\sin x + 3x^3$	2) $y = \sin x + 4x^3$
3) $y = x^5 - 8x^{10}$	3) $y = 3x^{11} - 5x^4$	3) $y = 4x^5 - 2x^{14}$	3) $y = x^5 - 10x^4$
4) $y = \frac{1}{x} - 4\cos x$	4) $y = \frac{1}{x} - \cos x$	4) $y = \frac{9}{x} - 5\cos x$	4) $y = \frac{12}{x} - \cos x$
5) $y = 12x^2 - \sqrt{x}$	5) $y = 2x^3 - 4\sqrt{x}$	5) $y = 13x^2 + 8\sqrt{x}$	5) $y = 10x^3 + 2\sqrt{x} - 1$
6) $y = 5x^7 - \frac{3}{x^2} - 2$	6) $y = x^3 + 4x^2 - \frac{1}{x^2}$	6) $y = x^4 - 6x + \frac{3}{x^3}$	6) $y = x^4 - 6x + \frac{3}{x^3}$
7) $y = x\cos x$	7) $y = x\sin x$	7) $y = x\,ctg\,x$	7) $y = x^2\cos x$
8) $y = (4 - x^2)\sin x$	8) $y = (x^2+5)(x^3 - 2x + 2)$	8) $f(x) = \sqrt{x}\,(3x^5 - x)$	8) $y = (2 - \sqrt{x})\,tg\,x$
9) $y = x(x^2 - 5x + 1)$	9) $y = x(x^3 + 4x^2 - 1)$	9) $y = x(x^5 - 2x + 1)$	9) $y = x(x^5 - 2x + 1)$
10) $y = \frac{x^2}{1+x}$	10) $y = \frac{3x - x^2}{1 - x}$	10) $y = \frac{x}{1 + x^2}$	10) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$
11) $y = \frac{x^3 - 3x}{1 - 2x}$	11) $y = \frac{\sin x}{1 - 2\cos x}$	11) $y = \frac{\cos x}{2 - x^3}$	11) $y = \frac{5 - 2x^6}{1 - x^3}$
12) $y = \frac{2 - x}{3x + 1}$	12) $y = \frac{2x}{3 + 4x}$	12) $y = \frac{8x - x^2}{1 + x}$	12) $y = \frac{x - \sqrt{3}}{3 - 2x}$
13) $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$	13) $y = \frac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$	13) $y = \frac{x^6 + 2x^5 - 2}{x^3}$	13) $y = \frac{2x^5 - x^4 + 3}{x^2}$
14) $y = \frac{2\sqrt{x}}{3x + 1}$	14) $y = \frac{-\sqrt{x}}{4x + 2}$	14) $y = \frac{3\sqrt{x}}{4x + 2}$	14) $y = \frac{6x - 1}{-\sqrt{x}}$
ЗАДАНИЕ 2. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:			
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$
ЗАДАНИЕ 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:			
$f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$	$f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$	$f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{2}x^3$

Критерий оценки:

		Оценка	**«5»**	**«4»**	**«3»**
Кол-во правильных	№1	1)-6)	4	3	3
		7)-9)	3	2	1

заданий		19)-14)	4	3	2
	№2		1	1	1
	№3		1	1	

Производная сложной и обратной функции. Физический и геометрический смысл производной

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Производная сложной функции вычисляется по правилу: $\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x}$

Производная обратной функции: $\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$

Таблица производных:

1	$(\log_a \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x \ln a}$, при a>0, a$\neq$ 1	5	(arcsinx)'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	Ч. сл. $(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}$	6	(arccosx)'=$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	7	(arctgx)'=$\frac{1}{1+x^2}$
4	Ч. сл. $\left(e^x\right)' = e^x$	8	(arcctgx)'=$-\frac{1}{1+x^2}$

Физический (механический) смысл производной

Скорость протекания физических, химических и других процессов также выражаются с помощью производной. В частности, если тело движется прямолинейно по закону S=S(t), то скорость: $v(t) = S'(t)$ и ускорение: $a(t) = v'(t)$.

Геометрический смысл первой производной.

Тангенс угла α (рис.1) называется **угловым коэффициентом наклона касательной** $k_{кас}$ к графику функции y=f(x) в точке x_0, т.е. $k_{кас}$=tgα . С другой стороны, $k_{кас}$=y'(x_0). Тогда производная есть тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси OX, т.е y'(x_0)= tgα

Уравнение касательной *l*: $y-y_0=y'_0(x-x_0)$ (1)

Нормалью называется прямая, проходящая через точку $x=x_0$, перпендикулярно к касательной.

Уравнение нормали *n*: $y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0)$ (2)

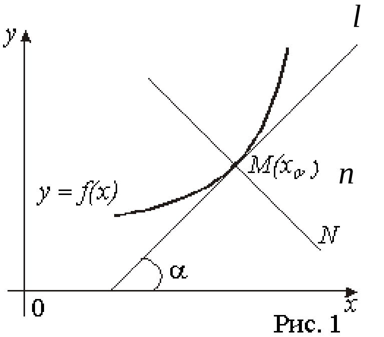


Рис. 1

План составления уравнений касательной и нормали в точке $x=x_0$:
1. f(x_0)
2. f '(x)
3. f '(x_0)
4. подставить в уравнения (1) и (2)

Частные случаи:

1) если f '(x_0) =∞, т.е. не существует, то:
уравнение касательной: $x=x_0$ и касательная параллельна OY,
уравнение нормали: $y=y_0$ и нормаль параллельна оси OX

2) если f '(x_0)=0, то:
уравнение касательной: $y=y_0$ и касательная параллельна OX;
уравнение нормали: $x=x_0$ и нормаль параллельна оси OY

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
		Задание 1. Найти y'(x_0), если	
y= $\frac{2x^2-3x}{4x-7}$, x_0=-1	y= $\frac{3x+5}{2x^2-3}$, x_0=2	y= $\frac{4x^2-7}{3x+2}$, x_0=-1	y= $\frac{5x^2-2}{6x+1}$, x_0=2
		Задание 2. Найти y', если	
а) y=ln(2x^2+3) б) y= $\sqrt{4x-1}$ в) y= $e^{\text{arctg } x}$.	а) y=tg3x б) y=e^{5x+1} в) y=ln(arcctgx)	а) y=ln(3x^2-1) б) y=cos2x в) y=e^{arccosx}	а) y=e^{-3x+2} б) y=sin5x в) y=ln(arctgx)

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке x_0

$y=x^3-3x^2+2$, $x_0=1$	$y=2x-5x^3+7$, $x_0=-1$	$y=x^2-x^4+5x$, $x_0=2$	$y=6x^2-7x+8$, $x_0=-1$

Задание 4. Найти угол наклона касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0.

$y=1-\frac{\sqrt{3}}{x}$, $x_0=-1$	$y=3-\frac{4}{x}$, $x_0=2$	$y=2-\frac{\sqrt{3}}{x}$, $x_0=1$	$y=4-\frac{9}{x}$, $x_0=3$

Задание 5. Тело движется прямолинейно по закону S=S(t). Найти скорость и ускорение в момент времени t. Через сколько секунд после начала движения тело остановиться

$S=\frac{2}{3}t^3-t^2-4t+11$, $t_0=3$ сек	$S=-\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2+3t+12$, $t_0=6$ сек	$S=\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-3t+5$, $t_0=5$ сек	$S=t^3-\frac{13}{2}t^2-10t+42$, $t_0=2$сек

Задание 6. Найти ускорение точки в указанные моменты времени t , если скорость точки, движущейся прямолинейно, определяется законом:

$V(t)=t^3-2t$, $t=2$;	$V(t)=2\sin t+\cos t$ $t=2\pi/3$;	$V(t)=t^3-2t^2+t$, $t=2$;	$V(t)=\text{tg}t-4\sin t$ $t=\pi/6$;

Задание 7. Сила тока J изменяется в зависимости от времени t по закону $I=0{,}4t^2$ (I - в амперах, t - в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце восьмой секунды.

Тема: «Вычисление производных»

Цель:

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление производных».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблица производных элементарных функций; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Сформулируйте определение функции.
   б) Сформулируйте правила вычисления производных алгебраических функций.
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

Задания

Найдите производную функции:

а) $f(x)=2x^5-\frac{4}{x^2}$; а) $f(x)=3x^4+\frac{2}{x^3}$;

б) $f(x)=(2\sqrt{x}+1)\cdot x^3$. б) $f(x)=(3\sqrt{x}-2)\cdot x^2$.

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=\frac{x^2}{4}-x$, $x_0=2$; а) $f(x)=\frac{x^2}{2}+2x$, $x_0=-1$;

Найдите производную функции:

а) $f(x)=x\sqrt{x}-8x^3$; а) $f(x)=3x^5+x^2\sqrt{x}$;

Найдите производную функции $f(x)=3x^4-2{,}5x^2+x+\pi$

$$f(x)=5x^3-0{,}5x^2+x+\frac{\pi}{2}$$

Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$

$f'(x)=0$, если $f(x)=\frac{2}{3}x^3-4{,}5x^2-5x$

Тема: «Вычисление производных»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление производных».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблица производных элементарных функций; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

4. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Сформулируйте определение функции.

б) Сформулируйте правила вычисления производных алгебраических функций.

5. Изучить условие заданий для практической работы.
6. Оформить отчет о работе.

Задания

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x^2}$; а) $f(x) = 3x^4 + \frac{2}{x^3}$;

б) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot x^3$. б) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2) \cdot x^2$.

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x,\ x_0 = 2$; а) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x,\ x_0 = -1$;

Найдите производную функции:

а) $f(x) = x\sqrt{x} - 8x^3$; а) $f(x) = 3x^5 + x^2\sqrt{x}$;

Найдите производную функции

$$f(x) = 7{,}5x^2 + \sqrt{x} + 0{,}5x + 2\pi$$
$$f(x) = 4x^5 - 3{,}5x^2 + 2x + 2\pi$$

Решите уравнение

$f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 7{,}5x^2 - 8x$

$f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2{,}5x^2 + 6x$

Задания

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x^2}$; а) $f(x) = 3x^4 + \frac{2}{x^3}$;

б) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot x^3$. б) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2) \cdot x^2$.

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x,\ x_0 = 2$; а) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x,\ x_0 = -1$;

Найдите производную функции:

а) $f(x) = x\sqrt{x} - 8x^3$; а) $f(x) = 3x^5 + x^2\sqrt{x}$;

Найдите производную функции

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x}$$
$$f(x) = 4x + \sqrt{x} - \frac{x^3}{3}$$

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 1{,}5x^2 - 2x + \pi$

$f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 7$

$f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3{,}5x^2 + 12x - 2{,}5$

Тема: «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Что называется первообразной функции?
б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.

2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x - 1$ первообразной для функции $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x) = \left(\frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x\right)' = \frac{2}{9}\cdot 3x^2 - 3\cdot 1 + (-\sin x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x = f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x - 1$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; 1 + 2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x) = 2\cdot 2\sqrt{x} - tgx + C = 4\sqrt{x} - tgx + C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4}; 1 + 2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1 + 2\sqrt{\pi} = 4\sqrt{\frac{\pi}{4}} - tg\,\frac{\pi}{4} + C.$$

Отсюда находим, что

$$1 + 2\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi} - 1 + C,$$

$C = 2$.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x) = 4\sqrt{x} - tgx + 2$.

Задания

<u>Вариант 1.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = 2x + 3$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

   б) Для функции $f(x) = \sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; -2\right)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) Что называется первообразной функции?

б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.

2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что $1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$, $C = 2$.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания

<u>Вариант 2.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=-x^3+5$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   б) Для функции $f(x)=(4-5x)^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{20}\right)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающегося.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.

2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\,\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что $1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$, $C=2$.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания

<u>Вариант 3.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=2x-1$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{7}{\cos^2 x}-3x-x^3$.

   б) Для функции $f(x)=\sin 3x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{12};0\right)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающегося.

<u>Время:</u> 2 часа.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.

3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x - 1$ первообразной для функции $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x) = \left(\frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x\right)' = \frac{2}{9}\cdot 3x^2 - 3\cdot 1 + (-\sin x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x = f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x - 1$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; 1 + 2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x) = 2\cdot 2\sqrt{x} - tgx + C = 4\sqrt{x} - tgx + C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4}; 1 + 2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1 + 2\sqrt{\pi} = 4\sqrt{\frac{\pi}{4}} - tg\frac{\pi}{4} + C.$$

Отсюда находим, что $1 + 2\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi} - 1 + C$, *C* = 2.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x) = 4\sqrt{x} - tgx + 2$.

Задания

<u>Вариант 4.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = -\frac{1}{x^3} - \cos x$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = x(x+1)(x+2)$.

   б) Для функции $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;3)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающегося.

<u>Время:</u> 2 часа.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.

4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\,\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что $1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$, $C = 2$.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания

<u>Вариант 5.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{x^4}{4}+x$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\left(x^{10}-\frac{1}{x^{10}}\right)^2$.

   б) Для функции $f(x)=x-10\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;-5)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что $1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$, C = 2.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания

<u>Вариант 6.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=1-\sin x$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=3e^x+5\cos x-7x^4$.

   б) Для функции $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(1;2)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

<u>Время:</u> 2 часа.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что $1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$, $C = 2$.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания

<u>Вариант 7.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=3(x+2)x^2$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\sqrt[7]{x}+7^x+2x^2$.

   б) Для функции $f(x)=-6\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-3\right)$.

<u>Тема:</u> «Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что $1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$, $C=2$.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания

<u>Вариант 8.</u>

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=1-\frac{1}{x^3},\quad x>0$
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=2\sin x+2^x-\frac{1}{x^3}$.

   б) Для функции $f(x)=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{2}\right)$.

<u>Тема:</u> Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить условие заданий для практической работы.
2. Оформить отчет о работе.

Задания

<u>*1 вари*ант.</u>

1. Производная функции $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 8$ равна:

2. Производная функции $y = x\cos x + x^2 \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равна:

3. Производная функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = -1$ равна:

4. Производная функции $y = \sqrt{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ равна:

<u>Тема:</u> Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

<u>Время:</u>2 часа

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить условие заданий для практической работы.
2. Оформить отчет о работе.

Задания

<u>2 вари</u>ант.

1. Производная функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5$ равна:

2. Производная функции $y = x^2 \cos x + x\sin x$ в точке $x_0 = \pi$ равна:

3. Производная функции $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ в точке $x_0 = 1$ равна:

4. Производная функции $y = \sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$ равна:

<u>Тема:</u> Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить условие заданий для практической работы.
2. Оформить отчет о работе.

Задания

<u>3 вари</u>ант.

1. Производная функции $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + 2x^4 - 7$ равна:

2. Производная функции $y = x^2 \sin x - x\cos x$ в точке $x_0 = \pi$ равна:

3. Производная функции $y = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$ в точке $x_0 = 1$ равна:

4. Производная функции $y = \sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cos x - \frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ равна:

<u>Тема:</u> Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

Задания

*4 вари*ант.

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{6}x^6-5x^4-6$ равна:
2. Производная функции $y=x\sin x-x^2\cos x$ в точке $x_0=\pi$ равна:
3. Производная функции $y=\frac{1+x}{x^2-1}$ в точке $x_0=0$ равна:
4. Производная функции $y=\sqrt{2}\sin x-\frac{2}{\pi}x^2-\cos\frac{\pi}{6}$ в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$ равна:

Тема: Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Построение графиков функций.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

Время:2 часа

ОБОРУДОВАНИЕ: микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
   б) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
   в) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
   г) Опишите схему исследования функции.
   д) Что такое естественная область определения функции?
2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

Задания

Построить график функции и найти область определения и область значения функции:

a) y=x-4
b) $y=2x^2+3$
c) $y=x^3/3-2$
d) y= $\sqrt{õ-5}$
e) y= $\frac{õ+1}{õ^2+3}$

Исследование и построение графиков функции

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ПЛАН исследования и построения графика функции:

1. Найти область определения
2. Определить четность нечетность, и симметричность графика
3. Найти точки пересечения с осями координат (OY: x=0, y-?; OX: y=0, x - ?)
4. Определить промежутки монотонности и найти точки экстремума
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба
6. Если исследований недостаточно для построения графика, то необходимо найти дополнительные точки графика, дав какие-либо значения для x.
7. Построить график по проведенным исследованиям.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Разобрать пример.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$

Решение:

1) Область определения: $x \in (-\infty;+\infty)$

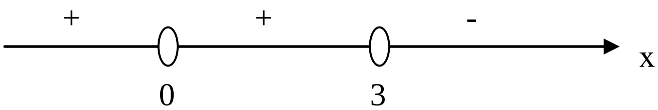
2) $y(-x) = \dfrac{4(-x)^3 - (-x)^4}{5} = \dfrac{-4x^3 - x^4}{5} \neq y(x)$

$y(-x) = -\dfrac{4x^3 + x^4}{5} \neq -y(x)$, значит функция не является ни четной, ни нечетной

3) Точки пересечения: OY: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{4 \cdot 0^3 - 0^4}{5} = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, A(0;0)

OX: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5} \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x^3(4-x)}{5} \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3(4-x) \end{cases}$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \end{array}\right.$, A(0;0), B(4;0)

4) $y' = \left(\dfrac{4x^3 - x^4}{5}\right)' = \dfrac{12x^2 - 4x^3}{5}$, $\dfrac{12x^2 - 4x^3}{5} = 0$, $12x^2-4x^3=0$, $x^2(12-4x)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$

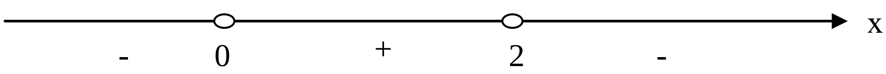


$(-\infty;0),\ x=-1,\ y'>0$ $(0;3),\ x=1,\ y'>0$ $(3;+\infty),\ x=4,\ y'<0$

$y_{max}=y(3)=5{,}4$, C(3; 5,4)

возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$, убывает при $x \in (3;+\infty)$

5) $y'' = \left(\dfrac{12x^2 - 4x^3}{5}\right)' = \dfrac{24x - 12x^2}{5}$, $\dfrac{24x - 12x^2}{5} = 0$, $24x-12x^2=0$, $12x(2-x)=0$, $x_1=0$, $x_2=2$



$(-\infty;0),\ x=-1,\ y''<0$ $(0;2),\ x=1,\ y''>0$ $(2;+\infty),\ x=4,\ y'<0$

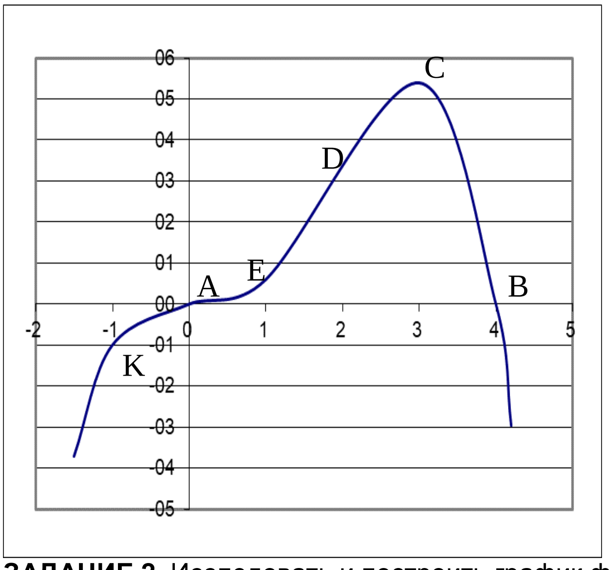
$y_{пер}=y(0)=0$, O(0;0), $y_{пер}=y(2)=3{,}2$, P(2; 3,2)

выпуклый при $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$, вогнутый при $x \in (0;2)$

6) Дополнительные точки:

	E	K
x	1	-1
y	0,6	-1

7)



ЗАДАНИЕ 2. Исследовать и построить график функции
Вариант 1. f(x)=x^4-x^3+2
Вариант 2. f(x)=3x^3-2x^2+6x+3
Вариант 3. f(x)=x^3-3x^2-x+3
Вариант 4. f(x)=x^4-10x^2+9
Вариант 5. f(x)= -x^4+2x^2+3
Вариант 6. f(x)=2x^3-6x^2+3
Вариант 7. f(x)= -x^3+6x^2-9x+3
Вариант 8. f(x)=x^4-6x^2+4
Вариант 9. f(x)=2x^3-3x^2+5x
Вариант 10. f(x)=x^4-3x^3-x^2
ДОПОЛНИТЕЛЬНО:
Вариант 1, 4, 5, 8, 10. f(x)=x^3-3x^2-x+3
Вариант 2, 3, 6, 7, 9. f(x)=-x^4+2x^2+3
Наибольшее и наименьшее значения функции.
Решение задачи на максимум и минимум.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Наибольшим (наименьшим) значением функции называется самое большое (маленькое) из всех ее значений
Функция может иметь только 1 наибольшее значением и только 1 наименьшее значение или может не иметь их совсем
<u>Свойства функций:</u>
1) $x \in (a;b)$. y=f(x) – непрерывна, имеет только 1 экстремум.
   а) если это максимум, то он является наибольшим значением;
   б) если это минимум, то он является наименьшим значением
2) $x \in [a;b]$. y=f(x) – непрерывна, то обязательно существует на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка или на концах этого отрезка

2. План нахождения наибольшего и наименьшего

<u>**План** нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке</u>$[a;b]$

1) Область определения – данный отрезок
2) Найти экстремумы функции на данном отрезке
3) Найти значения данной функции на концах отрезка, т.е. f(a) и f(b)
4) Выбрать из всех найденных значений функции самое большое (наибольшее) и самое маленькое (наименьшее) значения

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

Вариант 1.	**Вариант 2.**	**Вариант 3.**	**Вариант 4.**
$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$, [1;4]	y = x³ – 3x + 4, [– 2; 0]	$y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1;9]$	y = x³ – 27x, [0; 4]
Вариант 5.	**Вариант 6.**	**Вариант 7.**	
$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$, [-4;-1]	$y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15, \left[\frac{1}{2}; 2\right]$	y = x³ – 2x² + x +3, [1;4]	
Вариант 8.	**Вариант 9.**	**Вариант 10.**	

$y=\frac{4}{x^2}-8x-15,\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$	$y=2x^2+\frac{108}{x}-59$,[2;4]	$y=4-x-\frac{4}{x^2},[1;4]$

ЗАДАНИЕ 2. Решить задачи:

Вариант 1.

1) Число 16 разложить на 2 таких положительных множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

2) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 8 см. Найти длину каждого катета, если площадь треугольника должна быть наибольшей.

Вариант 2.

1) Число 25 запишите в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

2) Кусок проволоки длиной в 84 см требуется согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь этого прямоугольника была наибольшей.

Вариант 3

1) Докажите, что из всех прямоугольников, имеющих периметр 32 см, наибольшую площадь имеет квадрат.

2) Какое положительное число, будучи сложенное с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

Вариант 4

1) Число 50 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим

2) Докажите, то из всех прямоугольников с площадью 400 $см^2$ квадрат имеет наименьший периметр

ДОПОЛНИТЕЛЬНО:

1) Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=2+12t+2t^2-\frac{1}{3}t^3$. Найти максимальную скорость движения тела.

2) Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точке с абсциссой x= -2

3) Путь S в метрах, пройденный телом за t секунд при прямолинейном движении, определяется уравнением $S(t)=\frac{1}{3}t^3+2t-t^2-1$. Найти скорость и ускорение в конце третьей секунды.

Раздел I. Алгебра и начала математического анализа

4. Первообразная и интеграл

Вычисление неопределенного интеграла

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Свойства неопределенного интеграла:

$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$, а – постоянная,

$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n≠ -1

3. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, а>0, а≠ 1

6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$

7. $\int \cos xdx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-n^2x^2}} = \frac{1}{n}\arcsin \frac{n}{k}x + C$

13. $\int \frac{dx}{k^2+n^2x^2} = \frac{1}{nk} arctg \frac{n}{k}x + C$

$k \neq 0, n \neq 0 - постоянные$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Найти неопределенные интегралы

ВАРИАНТ I.

1) $\int x^4 (x-1)dx$
2) $\int (3x^{-4} + 8x^{-5})dx$
3) $\int (4 - 3\cos x)dx$
4) $\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$
5) $\int (2 - 3e^x + x)dx$
6) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{\sqrt{x}} dx$
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}}$
8) $\int \sqrt[3]{(3x^2 - 1)^2} \cdot xdx$
9) $\int \sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right)dx$
10) $\int \frac{\cos xdx}{4 + 3\sin x}$

ВАРИАНТ II.

1) $\int 5x\sqrt{x}dx$
2) $\int 2\cos zdz$
3) $\int (x-2)^3 dx$
4) $\int \frac{5dx}{\cos^2 x}$
5) $\int \left(7 - \frac{1}{2\cos^2 x} - x^2\right)dx$
6) $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}} - 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
7) $\int \frac{xdx}{x^2 + 1}$
8) $\int \sqrt[5]{(2x^3 - 4)^3} \cdot x^2 dx$
9) $\int tgxdx$
10) $\int x \cdot 2^{x^2} dx$

ВАРИАНТ III.

1) $\int x^3 (1 + 5x)dx$
2) $\int (3^x - e^x - 1)dx$
3) $\int \frac{3dx}{x}$
4) $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$
5) $\int \left(2x^{-5} - 10x^4 - \frac{1}{x}\right)dx$
6) $\int \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
7) $\int \frac{x^3 dx}{(x^4 + 5)^4}$
8) $\int \sqrt[4]{(2 - \sin x)^3} \cdot \cos xdx$
9) $\int e^{\cos x} \cdot \sin xdx$
10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

ВАРИАНТ IV.

1) $\int (4u^3 - 6u^2 - 4u + 3)du$
2) $\int 2(3x - 1)^2 dx$
3) $\int 5^x dx$
4) $\int (e^x + 2x)dx$
5) $\int (2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{1 + x^2})dx$
6) $\int \frac{3 + \sqrt[4]{x}}{x} dx$
7) $\int \frac{t^2 dt}{\sqrt[5]{5 - 2t^3}}$
8) $\int 3^{2 + x^2} xdx$
9) $\int \sqrt{2\sin x + 1} \cdot \cos xdx$
10) $\int \frac{x^2 dx}{5 - 2x^3}$

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вариант 1,3.

1. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[4]{2x^5 - 4}}$
2. $\int \left(3x^3 - 4\right)^2 x^2 dx$
3. $\int \frac{\cos xdx}{(3\sin x + 1)^3}$
4. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

Вариант 2,4.

1. $\int \cos^4 x \cdot \sin xdx$
2. $\int \frac{\cos tdt}{\sqrt{1 - 2\sin t}}$
3. $\int \frac{\sin tdt}{(2\cos t + 3)^3}$
4. $\int e^{x^3} x^2 dx$

Решение задач с помощью определенного интеграла

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона - Лейбница

Алгоритм нахождения определенного интеграла:

1) Найти первообразную функцию F(x) для функции f(x)
2) Вычислить значение F(x) при x=b
3) Вычислить значение F(x) при x=a
4) Вычислить разность F(b)-F(a)

Свойства

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Метод подстановки

1) часть подынтегральной функции заменить новой переменной
2) найти дифференциалы от обеих частей замены
3) найти новые пределы интегрирования

4) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (должен получиться более простой интеграл), заменить старые пределы интегрирования новыми
5) вычислить полученный определенный интеграл

Геометрическое приложение

1) Площадь фигуры, ограниченной графиками

y=f(x), x=a, x=b и y=0 $S_{кр.тр} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$	y=f(x) и y=g(x), (f(x)>g(x), x=a, x=b $S_{пл.ф} = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$

2) Объем тела, образованного вращением плоской фигуры

вокруг оси OX, ограниченной y=f(x), x=a, x=b и y=0 $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$	вокруг оси OY, ограниченной x=f(y), y=a, y=b и y=0 $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(y)dy$

Физическое приложение

величины	*интеграл*	*величины*	*интеграл*
S – путь, v – скорость, t - время	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$	q – электрический заряд I – сила тока	$q = \int_{t_2}^{t_1} I(t)dt$
A - работа переменной силы F – сила N - мощность	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ $A = \int_{t_2}^{t_1} N(t)dt$	m - масса стержня переменной плотности ρ - линейная плотность	m= $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
P – сила давления жидкости ρ - плотность g – ускорение ($g=9{,}81 м/c^2$) S – площадь пластины [a;b] – глубина погружения	$P = \rho \cdot g \int_a^b S(x)dx$	Q – количество теплоты C - теплоемкость	$Q = \int_{t_2}^{t_1} C(t)dt$

Экономическое приложение

Если y=f(t) описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени t, то объем выпуска продукции за промежуток времени $[t_1;t_2]$: $u = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1.Вычислить определенные интегралы:

Вариант 1.

1. $\int_0^3 x^2 dx$
2. $\int_{-2}^{3} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx$
3. $\int_0^2 (2 - x)^3 dx$
4. $\int_{-1}^{1} \frac{(4x^2 - x^4 - 1)dx}{x^2}$

Вариант 2.

1. $\int_1^2 x^4 dx$
2. $\int_{-1}^{0} (8x^3 + 3x^2 - 2)dx$
3. $\int_{-2}^{2} (1 + x)^3 dx$
4. $\int_1^2 \frac{(x^2 - 2x + 1)dx}{x}$

Вариант 3.

1. $\int_1^2 x^3 dx$
2. $\int_{-3}^{1} (x^3 + 2x)dx$
3. $\int_0^4 (2 + x)3dx$
4. $\int_1^8 \frac{x^2 - 1}{x} dx$

Вариант 4.

1. $\int_0^2 x^5 dx$

Вариант 5.

1. $\int_{-1}^{2} x^6 dx$

Вариант 6.

1. $\int_{-1}^{0} x^7 dx$

2. $\int_{-1}^{1}(1-x^2+4x^3+2x)dx$
3. $\int_{2}^{3}(x-1)^3dx$
4. $\int_{1}^{2}\frac{2x^2+1}{x}dx$

2. $\int_{-1}^{1}(5-x-3x^2)dx$
3. $\int_{0}^{2}(x-2)^3dx$
4. $\int_{2}^{3}\frac{1+x^5}{x^4}dx$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$
3. $\int_{-1}^{0}(1-x)^3dx$
4. $\int_{1}^{5}\frac{(1-3x)dx}{x}$

ЗАДАНИЕ 2. Решить задачи

Вариант 1.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3$, x=1, x=1,5, осью абсцисс
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y=3-\frac{1}{3}x^2$, y=2, y=0
3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v=3t^2—2t—t$. Вычислить ее путь за 5 с от начала движения.
4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01 нужна сила 10 Н.
5. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму прямоугольника с основанием 4 м и высотой 2 м (основание прямоугольника находится на поверхности воды).

Вариант 2.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2$, x=-2, x=2, осью абсцисс
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $x^2-2y=0$, y-2=0
3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v=9t^2—2t—8$. Вычислить ее путь за 3 с от начала движения.
4. Вычислить работу, совершенную при растяжении пружины на 0,06 м, если для растяжения ее на 0,03 м нужна сила 15 Н.
5. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму треугольника с основанием 2 м и высотой 3 м. Вершина треугольника находится на поверхности воды, а основание параллельно ей.

Вариант 3.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+2x+3$, y=0, x=1, x=2
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $x^2+1=y$, y=2
3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v=3t^2—2t+5$. Вычислить ее путь за четвертую секунду.
4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия ее на 0,02 м была затрачена работа 30 Дж.
5. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму полукруга с диаметром 4 м (полукруг соприкасается с поверхностью воды по диаметру).

Вариант 4.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2+1$, x=-2, x=0, осью абсцисс
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями xy=1, y=0, x=2, x=3, y=0
3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v=18t—6t^8$. Вычислить ее путь от начала движения до остановки.
4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,08 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10Н.
5. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму прямоугольника с основанием 2 м и высотой 4 м (основание прямоугольника находится на поверхности воды).

Тема: « Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница.»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?
   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.
   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
   г) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x+4+x^2$:

$$F(x)=-4\cdot\frac{x^2}{2}+4\cdot x+\frac{x^3}{3}+C=-2x^2+4x+\frac{x^3}{3}+C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx=\left.\left(-2x^2+4x+\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{2}=\left(-2\cdot2^2+4\cdot2+\frac{2^3}{3}\right)-\left(-2\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+\frac{(-2)^3}{3}\right)=$$

$$=\left(-8+8+\frac{8}{3}\right)-\left(-8-8-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной *a* верно равенство

$$\int_{-2a}^{a}2x^3dx=-7{,}5\ ?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\frac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^{a}2x^3dx=\left.\left(\frac{x^4}{2}\right)\right|_{-2a}^{a}=\frac{a^4}{2}-\frac{(-2a)^4}{2}=-\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2}=-7{,}5, \qquad -\frac{15a^4}{2}=-\frac{15}{2}, \qquad a^4=1, \qquad a=\pm1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число –1. О т в е т: -1.

Задания

<u>Вариант 1.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2}x^2dx=$

б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}(1+\cos 2x)dx=$

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x dx=$

г) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} =$

.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^1 (2x+1)dx = \int_0^2 (x^3-1)dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$$

Вариант 2.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x dx =$

б) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} =$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

г) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx .$$

Вариант 3.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} =$

б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} =$

в) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

г) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\ xdx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Вариант 4.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

б) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)} =$

в) $\int_{-1}^{2} -x^3 dx =$

г) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx =$

2. Верно ли неравенство: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}$?

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx\ .$$

Вариант 5.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} -x^3 dx =$

б) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx =$

в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x} =$

г) $\int_0^2 (1 + 3x)^4 dx =$

2. Верно ли неравенство: $\int_{-1}^{1} x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}\ ?$$

Вариант 6.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x} =$

б) $\int_0^2 (1+3x)^4 dx =$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos xdx =$

г) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}} =$

2. Верно ли неравенство: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

$\int_{-1}^1 x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

<u>Вариант 7.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos xdx$;

б) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

в) $\int_1^5 x^4 dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$.

2. Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx > \int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

<u>Вариант 8.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_1^5 x^4 dx$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$.

в) $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx =$

г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx =$

2. Верно ли неравенство: $\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx > \int\limits_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$

$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$

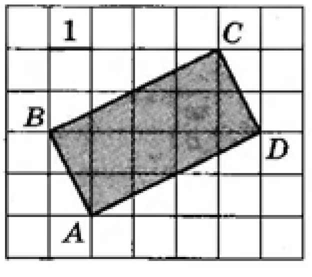
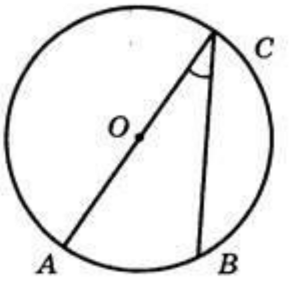
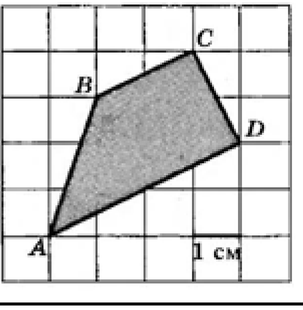
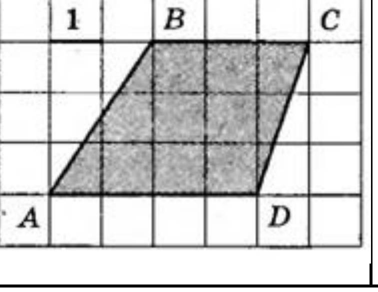
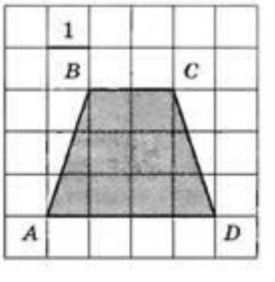
Раздел II. Геометрия
Тема: «Решение задач»
Цель: повторить решение задач.
Форма организации студентов на занятии: фронтальная.
Методические указания.

$s_{\text{прямоугольника}} = a \cdot b$ $s_{\text{параллелограмма}} = a \cdot h$

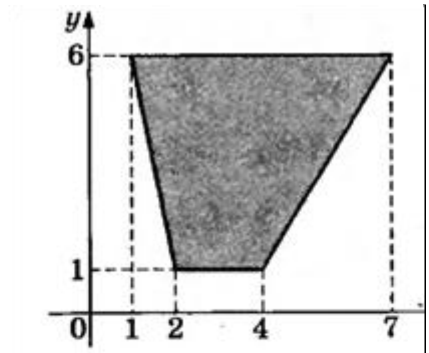
$s_{\text{круга}} = \pi r^2$ $s_{\text{треугольника}} = \frac{a \cdot h}{2}$ $s_{\text{трапеции}} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

Самостоятельная работа.
Вариант №1

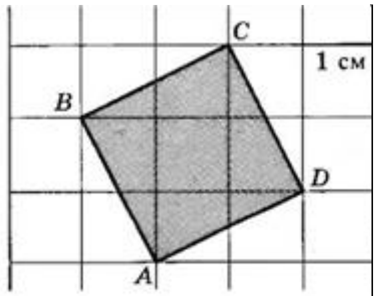
Найдите площадь фигур.

 *1.*	*2.*	 *3.* *Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 2/9 окружности.*
4. 	*5.* 	 *6.*

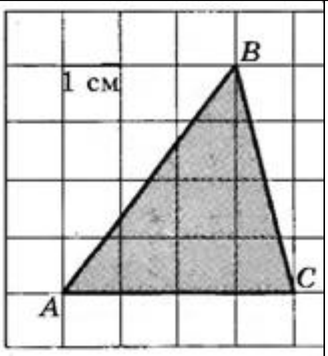
7.



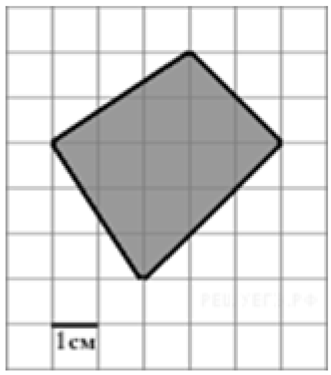
8.



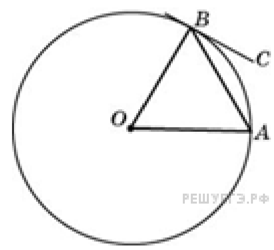
9.



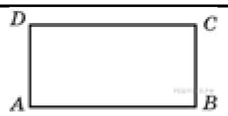
10.



11.

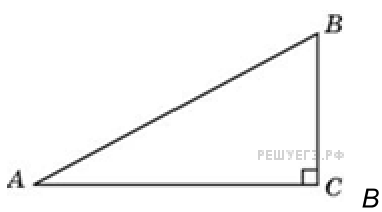


12. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой . Ответ дайте в градусах.

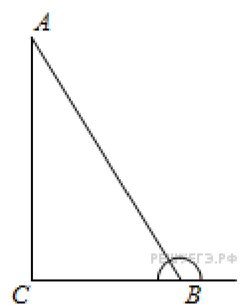


13. Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.

14.



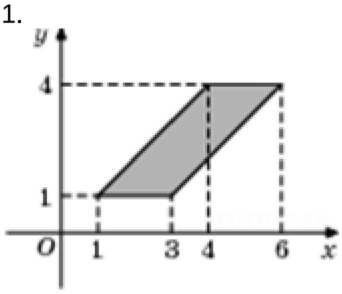
В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол равен , $AB = 4$. Найдите BC.



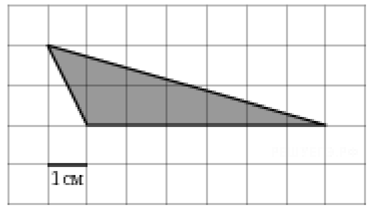
15. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = 2$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.

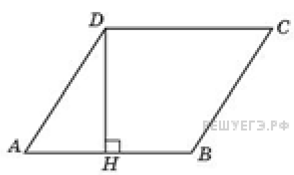
Вариант №2 *Найдите площадь фигур.*

1.



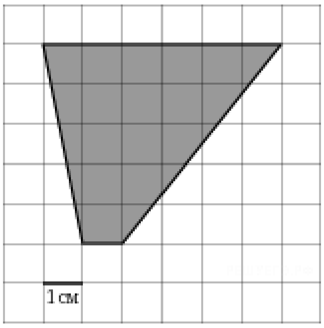
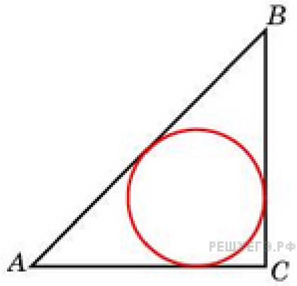
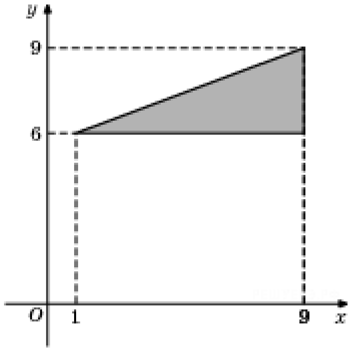
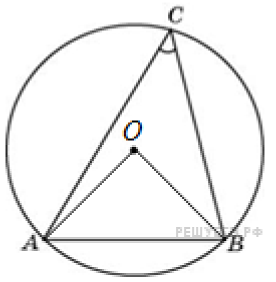
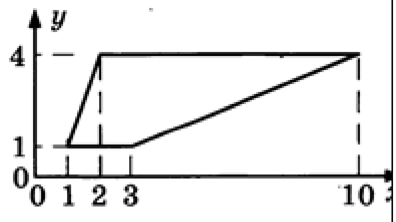
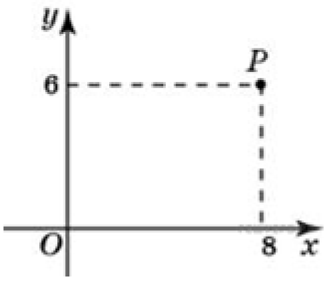
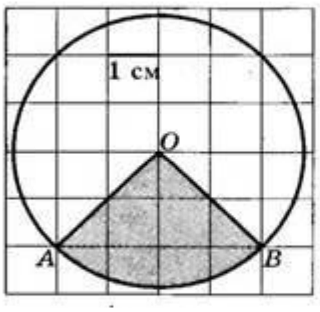
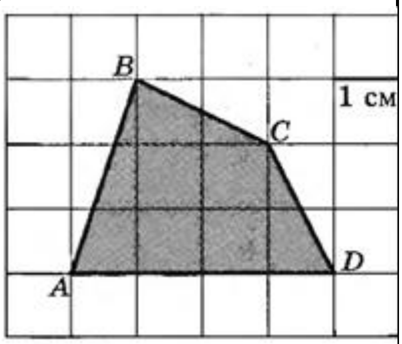
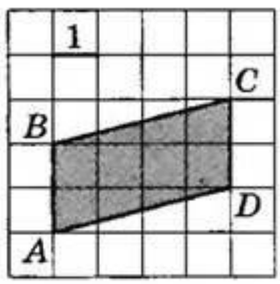
2.

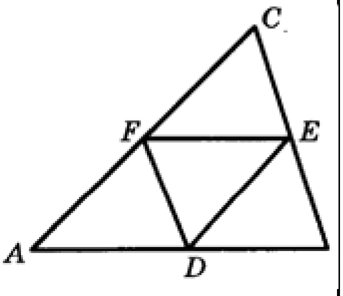




3.

Найдите высоту ромба, сторона которого равна , а острый угол равен .

 4.	 5. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу c этого треугольника.	 6.
7. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке P(8; 6), чтобы она касалась оси абсцисс?	 8. Радиус	 9.
	окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.	
10. 	11. 	 12.

13. Периметр треугольника ABC равен 10. Найдите периметри треугольника FDE, вершинами которого являются середины сторон тр. ABC 	14 . DE-средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Периметр треугольника CDE равен 6. Найдите периметр треугольника ABC. .	15. Периметр параллелограмма равен 50. Меньшая сторона равна 12. Найдите большую сторону.

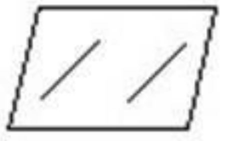
Критерии оценок: 15 заданий-«5», 14-12 заданий –«4»,11 -8 заданий –«3»

Тема: «Расположение прямых и плоскостей».

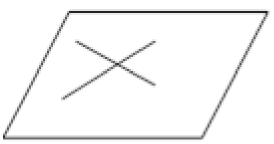
Цель: развить пространственное мышление, познакомиться с тремя видами прямых в пространстве.

Методические указания:

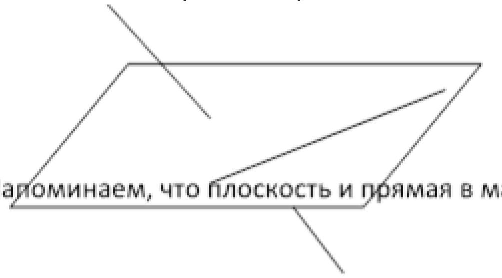
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они *лежат в одной плоскости и не пересекаются.*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две прямые в пространстве пересекаются, если они лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке.



ПРИЗНАК СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ. Если одна прямая лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке не принадлежащей этой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.



Напоминаем, что плоскость и прямая в математике бесконечны.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА.
Вариант №1

Задание №1.

Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1,2,3,4,5, расположенных на стержнях SA,SB,SC . Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки в которых отрезки нити соприкасаются.

Задание №2.

Точки M, N расположены на ребрах треугольной пирамиды. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.

Задание №3.

Точки M, N расположены на ребрах куба. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.

Задание №4.

Точки K, L, M, N принадлежат ребрам изображенной пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

Вариант №2

Задание №1.

Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1,2,3,4,5, 6, расположенных на стержнях SA,SB,SC . Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки в которых отрезки нити соприкасаются.

Задание №2.

Точки M,N расположены на ребрах треугольной пирамиды. Скопируйте рисунок, отметьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые , содержащие другие ребра пирамиды.

Задание №3.

Точки M, N расположены на ребрах куба. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.

Задание №4.

Точки K, L, M, N принадлежат ребрам изображенного куба. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

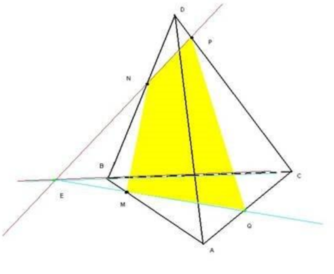
Критерии оценок: 4 задания-«5», 3задания –«4»,2 задания –«3»

Тема: «Задачи на построение сечений.»

Цель: освоить навыки построение сечений многогранника плоскостью, развить пространственное мышление.

Методические указания:

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их **сечения** различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем секущей плоскостью тетраэдра (призмы) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (призмы). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (призмы) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого является эти отрезки, называется сечением. Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами многоугольника, после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

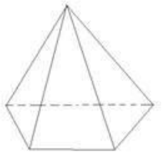


На ребрах AB, BD, CD тетраэдра ABCD отмечены точки M,N, P. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP .

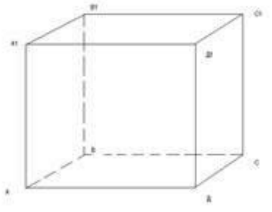
Решение.

Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E, которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая MEпересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник MNPQ- искомое сечение.

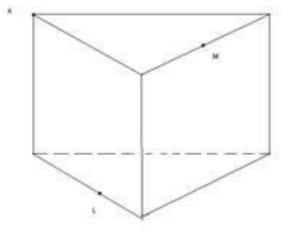
Обратите внимание на то, что на рисунке красные прямые принадлежат плоскости BCD, а синие прямые плоскости ABC. Прямая BC принадлежит обеим плоскостям.
Самостоятельная работа.
1)Построить сечение пирамиды, параллельное основанию и делящее высоту пополам.



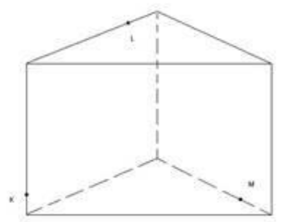
2)Построить сечение куба АВСД$A_1 B_1 C_1 Д_1$ с ребром 5 см плоскостью, проходящей через точки $A_1, C_1, Д$,и найти его площадь.



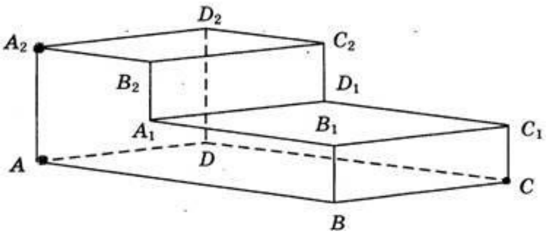
3) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, L, M .



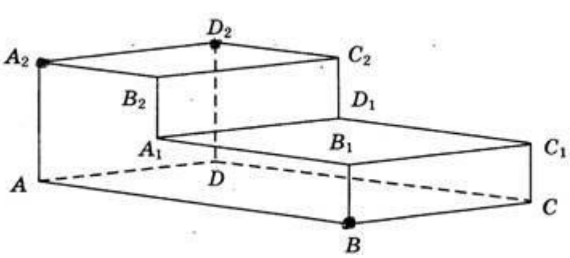
4) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, L, M .



5) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_2, A, C



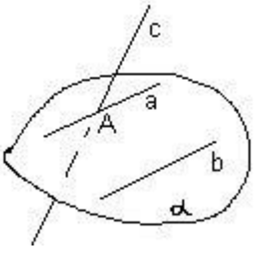
6) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_2, D_2, B



Тема: «Нахождение угла между двумя прямыми.»
Цель: освоить навыки построение сечений многогранника плоскостью, развить пространственное мышление.

Методические указания:
Если известны координаты точек начала и конца вектора, то каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и

начала. A$(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$ $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

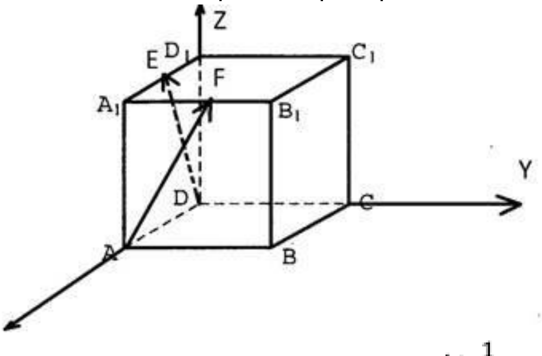


Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми. Например, чтобы найти угол между прямыми c и b нужно провести через точку A прямую a||b . Искомый угол – угол между прямыми c и a. Мы, для того чтобы облегчить решение задач, будем применять векторно-координатный метод. Алгоритм решения задач:

- Вводим прямоугольную систему координат
- Находим координаты направляющих векторов данных прямых
- Находим косинус угла по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DF и AE, где точки F и E – середины рёбер соответственно



AD_1 и A_1B_1

Решение. Найдём координаты точек. D(0;0;0), A(1;0;0), E$(1;\frac{1}{2};1)$, F$(\frac{1}{2};0;1)$
Если известны координаты точек начала и конца вектора, то каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и

начала. A$(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$ $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$$\overrightarrow{AE}\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \overrightarrow{DF}\left\{\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\varphi = arccos\frac{4}{5}$$

Ответ: $\varphi = arccos\frac{4}{5}$

Самостоятельная работа.
Вариант №1

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми АС и BD.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми СC_1 и AD
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми АA_1 и B_1C
4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми ВB_1 и A_1C
5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и DC_1
6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B
7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и D_1B_1
8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BD
9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми B_1C и A_1C_1

Вариант №2

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и AD.
2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и АС
3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми АС и B_1D_1
4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и CB_1
5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми B_1C и BD_1
6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB и CA_1
7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и D_1B_1
8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1
9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB и DB_1

Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»

Тема: «Двугранный угол.»

Цель: сформулировать понятия о двугранном угле, линейном угле двугранного угла.

Методические указания.

Двугранный угол при ребре основания многогранника (угол между боковой гранью и плоскостью основания). Так как АВ $\perp$ BC и MB $\perp$BC, то угол АВМ –линейный угол двугранного угла при ребре основания

Задача. Сторона основания правильной призмы АВСД$A_1B_1C_1Д_1$ равна 12, а боковое ребро $2\sqrt{6}$. Найдите градусную меру угла между плоскостями AB_1C и ABC.

Самостоятельная работа.

Вариант №1

1. АВСД$A_1B_1C_1Д_1$- прямая призма, в основании которой лежит квадрат со стороной, равной 2, боковое ребро призмы равно $\sqrt{\ }$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания призмы.

2. В основании прямой призмы АВСД$A_1B_1C_1Д_1$лежит квадрат.

Боковое ребро равно $\sqrt{\ }$ Найдите длину стороны основания, если угол между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания призмы равен 30^0.

Вариант №2

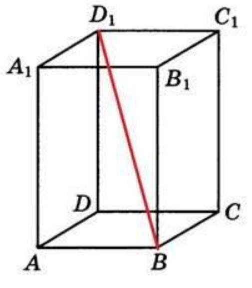
1. АВСД$A_1B_1C_1Д_1$- прямая призма, в основании которой лежит квадрат со стороной, равной $\sqrt{\ }$, боковое ребро призмы равно $\sqrt{\ }$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания призмы.

2. В основании прямой призмы АВСД$A_1B_1C_1Д_1$лежит квадрат. Боковое ребро равно $25\sqrt{2}$. Найдите длину стороны основания, если угол между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания призмы равен 45^0.

Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»

Тема: «Прямоугольный параллелепипед.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение площадей поверхности многогранников.



Методические указания.

Призмой называется многогранник, у которого две грани- равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (основаниями призмы) , а все остальные грани (боковые) пересекаются по параллельным прямым. Прямую призму называют правильной, если в основании призмы лежит правильный многоугольник. Параллелепипед можно назвать четырехугольной призмой (в основании лежит квадрат).

ТЕОРЕМА: Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

ТЕОРЕМА: Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Параллелепипед называется прямоугольным , если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.

ТЕОРЕМА: Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

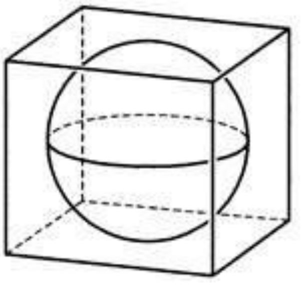
$$V = S_{\text{основания}} \cdot h$$

Самостоятельная работа.

Вариант №1

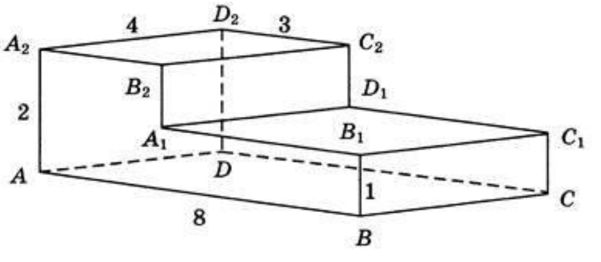
1. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если стороны оснований равны 10 см и 17 см, и большая диагональ параллелепипеда равна 29 см.
2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 25 см, а диагональ ее боковой грани 20 см. Найдите сторону основания.
3. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда имеют длины 8 см и 6см, а диагонали параллелепипеда 26 см. Найдите высоту.
4. Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с измерениями : 24, 32, 42

5. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 24 $см^3$, площадь основания равна 12$см^2$. Найти высоту параллелепипеда.
6. Основанием прямого параллелепипеда является квадрат со стороной 6 см.Площадь диагонального сечения 18 $см^2$. Найдите объём.
7. Диагональ куба равна $\sqrt{\ }$. Найдите его объём
8. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите



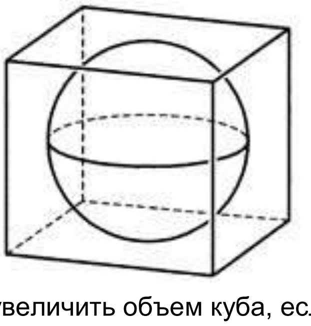
его объём.

9. Во сколько раз увеличить объем куба, если его рёбра увеличить в семь раз?
10. Найдите расстояние между вершинами А и C_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



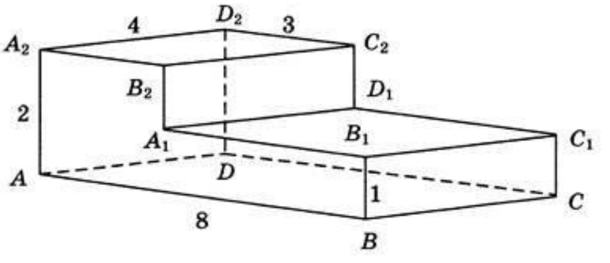
Вариант №2

1. Основанием прямого параллелепипеда является квадрат со стороной 6 см. площадь диагонального сечения равна 36$см^2$.
Найдите высоту параллелепипеда.
2. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения: 2дм, 3 дм, 6 дм.
3. Найдите площадь полной поверхности куба со стороной 6 см.
4. В прямоугольном параллелепипеде измерения относятся , как 3:6:22, а его диагональ равна 23 см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.
5. Найдите объём куба, диагональ которого равна 4 см.
6. Два металлических куба с рёбрами 1 см и 2 см соответственно сплавлены в один куб. Определите ребро этого куба.
7. Площадь полной поверхности куба равна 6 $см^2$. Найдите его объём.
8. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 7.



Найдите его объём.

9. Во сколько раз увеличить объем куба, если его рёбра увеличить в девять раз?
10. Найдите расстояние между вершинами А и D_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



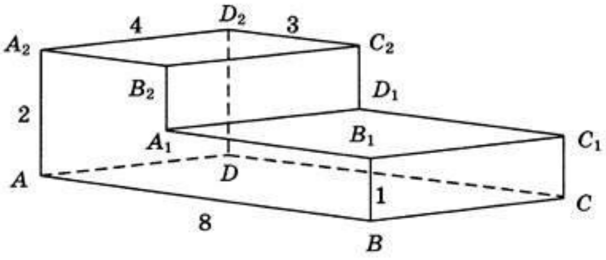
Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»
Тема: «Площади поверхностей и объѐм призмы.»
Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение площадей поверхности многогранников.

Методические указания.

Призмой называется многогранник, у которого две грани- равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (основаниями призмы) , а все остальные грани (боковые) пересекаются по параллельным прямым. Прямую призму называют правильной, если в основании призмы лежит правильный многоугольник. Параллелепипед можно назвать четырехугольной призмой (в основании лежит квадрат).
Теорема. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется Параллелепипедом.
Теорема. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на

$V = S_{\text{основания}} \cdot h$

DN-диагональ параллелепипеда.
В основании призмы может лежать треугольник, четырёхугольник (тогда призма будет называться параллелепипедом) и т.д.
Если в основании лежит квадрат, то $S_{\text{основания}} = a^2$
Самостоятельная работа.
Вариант №1
1. Высота прямой призмы, в основании которой лежит правильный треугольник, равна 12 см, сторона основания- 3 см. Вычислите площадь боковой поверхности.
2. Сторона правильной шестиугольной призмы равна 5 см, а высота призмы 4 см, найти площадь полной поверхности призмы.
3. Основание прямой призмы- прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45^0. Объём призмы равен 108 см^3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
4. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 6, боковое ребро равно 5. Найдите площадь полной поверхности призмы.
5. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.
6. В прямоугольном параллелепипеде ABCD $A_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер : AB=27, AD=36 ,AA_1=10. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D, D_1 и B.
7. Найдите площадь полной поверхности многогранника, изображённого на рисунке.



Вариант №2

1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда ABCD $A_1B_1C_1D_1$ равны 15 см и 20 см, а боковое ребро равно 16 см. найдите косинус угла между плоскостью BC_1D и плоскостью основания.
2. В прямоугольной призме стороны основания равны 6,8 и 10, а высота равна 8. Найдите площадь её полной поверхности.
3. Основание призмы -равносторонний треугольник со стороной 3 см. высота призмы равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
4. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 6, боковое ребро равно 5. Найдите площадь полной поверхности призмы.
5. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Боковое ребро равно 9. Найдите диагональ призмы.
6. В прямоугольном параллелепипеде известны длины ребер : AB=15, AD=8 =21. Найдите площадь сечения, проходящего

Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»
Тема: «Объѐм призмы.»
Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение объѐмов многогранников.

Призмой называется многогранник, у которого две грани- равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (основаниями призмы) , а все остальные грани (боковые) пересекаются по параллельным прямым. Прямую призму называют правильной, если в основании призмы лежит правильный многоугольник. Параллелепипед можно назвать четырехугольной призмой (в основании лежит квадрат). Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется параллелепипедом.

$$V = S_{\text{основания}} \cdot h$$

В основании призмы может лежать треугольник, четырёхугольник (тогда призма будет называться параллелепипедом) и т.д.
Пусть $a_n -$ сторона правильного $n -$ угольника; $r_n -$радиус вписанной окружности. Тогда $a_n = 2tg\frac{180^0}{n} \cdot r_n$, $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r_n$, где P это периметр многоугольника.

Самостоятельная работа.
Вариант №1

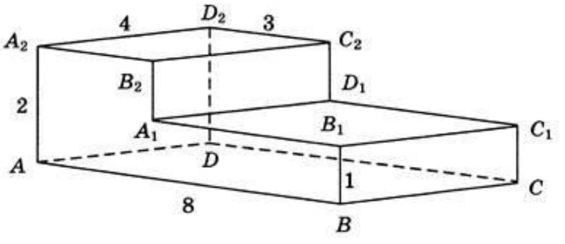
1. Высота прямой призмы, в основании которой лежит правильный треугольник, равна 12 см, сторона основания- 3 см. Вычислите объём призмы.
2. В прямоугольной призме стороны основания равны 3,3 и 5, а высота равна 8. Найдите объём призмы.
3. Сторона правильной шестиугольной призмы равна 5 см, а высота призмы 4 см, найти объём призмы.
4. Основанием прямой призмы служит

прямоугольный треугольник с катетами 3 и 6, боковое ребро равно 5. Найдите объём призмы.

5. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Боковое ребро равно 3. Найдите объём призмы.

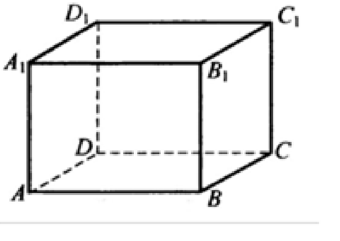
6. В прямоугольном параллелепипеде ABCD$A_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер :
AB=27, AD=36 ,AA_1=10.
Найдите объём DD_1B B_1

7. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке.



Вариант №2

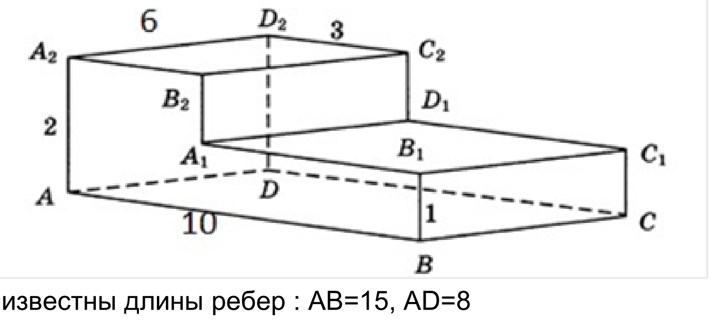
1. Высота прямой призмы, в основании которой лежит правильный треугольник, равна 16 см, сторона основания- 4 см. Вычислите объём призмы.
2. В прямоугольной призме стороны основания равны 6,8 и 10, а высота равна 8. Найдите объём призмы.
3. Основание призмы –правильный шестиугольник со стороной 3 см.
высота призмы равна 10 см. Найдите объём призмы.
4. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 6, боковое ребро равно 5. Найдите объём призмы.
5. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Боковое ребро равно 6. Найдите объём призмы.
6. В прямоугольном параллелепипеде



ABCB

,A =21. Найдите объём B D .

7. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке.



известны длины ребер : AB=15, AD=8

Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»

Тема: «Площади поверхностей пирамиды.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение площадей поверхности многогранников.

Методические указания.

Пирамидой называется многогранник, одной из граней служит многоугольник (основание пирамиды), а остальные грани (боковые) треугольники с общей вершиной (вершина пирамиды). Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник и вершина проектируется в центр основания,называется правильной. Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды называется апофемой (SN). Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость её основания (OS) называется высотой пирамиды.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды. Площадь полной поверхности многогранников равна сумме площади боковой поверхности и площади основания(й). В зависимости от условия задачи основанием правильного многоугольника может быть правильный треугольник , квадрат и т.д. Пусть $a_n -$ сторона правильного $n -$

о

угольника; $r_n -$радиус вписанной окружности. Тогда $a_n = 2tg\frac{180}{n} \cdot r_n$,

$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r_n$, где P – это периметр многоугольника.

Если в основании лежит квадрат, то $S_{основания} = a^2$

Напомним также, что высота перпендикулярна к плоскости основания, то есть высота перпендикулярна к любой прямой лежащей в плоскости основания.

Вариант №1

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O- центр основания, S вершина , $SO = 10, BD = 48$. Найдите боковое ребро SA.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O- центр основания, S вершина , $SO = 7, BD = 48$. Найдите боковое ребро SA.
3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка R- середина ребра BC, S вершина , $AB = 7, SR = 16$. Найдите площадь боковой поверхности.
4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4см, радиус окружности, вписанной в основание равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
5. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 30^0, апофема равна 4 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.
6. В правильной треугольной пирамиде SABC K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что AB=4, а SK=21. Найдите площадь боковой поверхности.
7. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 8. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.
8. Тангенс угла между боковым ребром правильной четырёхугольной пирамиды и плоскостью её основания равен . Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.
9. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10 и образует с плоскостью основания угол, синус которого равен 0,8. Найдите высоту основания пирамиды.
10. В правильной треугольной пирамиде SABC K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что AB=7, а площадь боковой поверхности равна 168. Найдите длину отрезка SK.

Вариант №2

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O- центр основания, S вершина , $SO = 24, BD = 20$. Найдите боковое ребро SA.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O- центр основания, S вершина , $SO = 24, BD = 14$. Найдите боковое ребро SA.
3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка R- середина ребра BC, S вершина , $AB = 4, SR = 3$. Найдите площадь боковой поверхности.
4. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 45^0, апофема равна 4 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

5. В правильной треугольной пирамиде SABC K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что AB=8, а SK=20. Найдите площадь боковой поверхности.

6. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 10, а сторона основания равна 5. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

7. Тангенс угла между боковым ребром правильной четырёхугольной пирамиды и плоскостью её основания равен $\sqrt{\ }$. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

9. В правильной треугольной пирамиде SABC K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что AB=6, а площадь боковой поверхности равна 729. Найдите длину отрезка SK. 10. Высота правильной треугольной пирамиды равна 6см, радиус окружности, вписанной в основание равен 8 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»

Тема: «Усеченная пирамида».

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение площадей поверхности многогранников, развить пространственное мышление.

Методические указания.

Часть пирамиды, заключенная между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется **усеченной пирамидой.** Основание и соответствующее сечение усеченной пирамиды называются **основаниями усеченной пирамиды.** Основания усеченной пирамиды являются подобными многоугольниками, их стороны попарно параллельны, поэтому боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями. Перпендикуляр, проведённый из какой-либо точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой усеченной пирамиды (h).** Сечение усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется **диагональным сечением** (закрашено на рисунке). Усеченная пирамида называется правильной, если она часть правильной пирамиды (пирамиды в основании, которой лежит правильный многоугольник и вершина проектируется в центр основания). Высота боковой грани правильной пирамиды называется **апофемой.**

Основные свойства правильной усеченной пирамиды:

1. Боковые ребра, боковые грани и апофемы соответственно равны.
2. Двугранные углы при основании равны.
3. Двугранные углы при боковых ребрах равны.

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров её оснований на апофему.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей оснований и площади боковой поверхности.

Самостоятельная работа.

1. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 6 и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости оснований под углом 45^0. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. (Подсказка: 1) верхнее основание усеченной пирамиды квадрат со стороной 6 см, нижнее основание квадрат со стороной 8 см; 2) при построении линейного угла двугранного угла получим трапецию, закрашенную на рисунке; 3)основания трапеции будут равны 6 и 8(объясните сами почему), из всего этого можно найти боковую сторону трапеции, она же апофема; 4) далее можно найти площадь боковой поверхности усечённой пирамиды).

2.В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 10см и 6 см, а площадь диагонального сечения $8\sqrt{10}\text{ см}^2$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды (смотри рисунок в методических указаниях).

Тема: «Объѐм пирамиды.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение объѐмов многогранников.

Методические указания.

Пирамидой называется

многогранник, одной из граней служит многоугольник (основание пирамиды) , а остальные грани (боковые) треугольники с общей вершиной (вершина
пирамиды). Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник и вершина проектируется в центр основания,называется правильной. Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды называется апофемой (SN). Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость её основания (OS) называется высотой пирамиды.

В зависимости от условия задачи основанием правильного многоугольника может быть правильный треугольник , квадрат и т.д. Пусть a_n −
сторона правильного n − угольника; r_n −

0 радиус вписанной окружности.

Тогда $a_n = 2tg\frac{180}{n}\cdot r_n$, $S = \frac{1}{2}\cdot P\cdot r_n$, где P это периметр многоугольника.

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

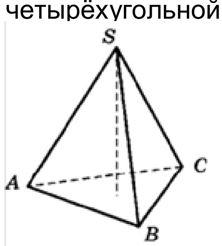
Если в основании лежит квадрат, то $S_{основания} = a^2$

Напомним также, что высота перпендикулярна к плоскости основания, то есть высота перпендикулярна к любой прямой лежащей в плоскости основания.

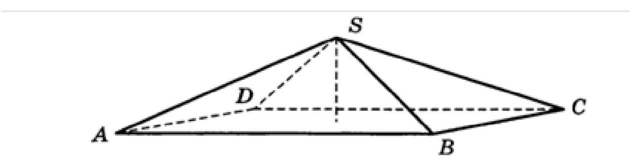
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА.

Вариант №1

1. Найдите объём пирамиды с высотой 2 м, а в основании лежит квадрат со стороной 3м.
2. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.
3. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 10, а высота равна $2\sqrt{}$
4. В правильной четырёхугольной пирамиде

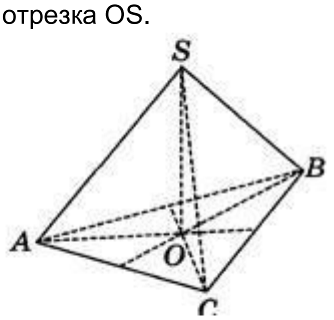


ее объём.



высота равна 2, боковое ребро равно 8. Найдите

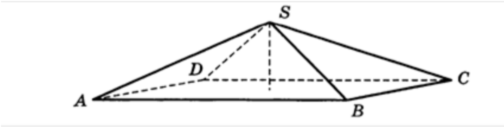
5. Объём данного правильного тетраэдра равен 64 $см^3$. Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого в 2 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в $см^3$.
6. В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 16, объём пирамиды равен 80. Найдите длину отрезка OS.

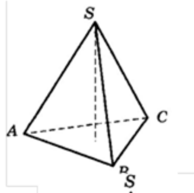


Вариант №2

1. Найдите объём пирамиды с высотой 3 м, а в основании лежит квадрат со стороной 4 м.
2. Найдите объём пирамиды, стороны основания которой 5см, 5см, 6 см, а высота равна 12см.
3. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной пирамиды, равна 8 дм, а её высота 12 дм. Найдите объём пирамиды.

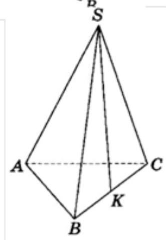
4. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите ее объём.

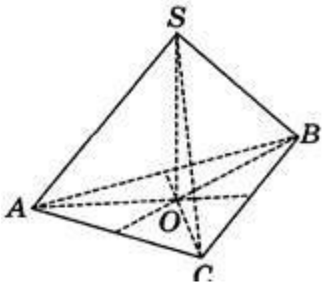




5. Объём данного правильного тетраэдра равен 216 . Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого в 2 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в .

6. В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 9, объём пирамиды равен 90. Найдите длину отрезка OS.





Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»

Тема: «Площадь поверхности цилиндра.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение площадей поверхности тел вращения.

Методические указания.

Пример.

Дан цилиндр. Осевое сечение -квадрат. Площадь основания равна $4\pi.$ Найти площадб полной поверхности.

Решение.

$$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh.$$

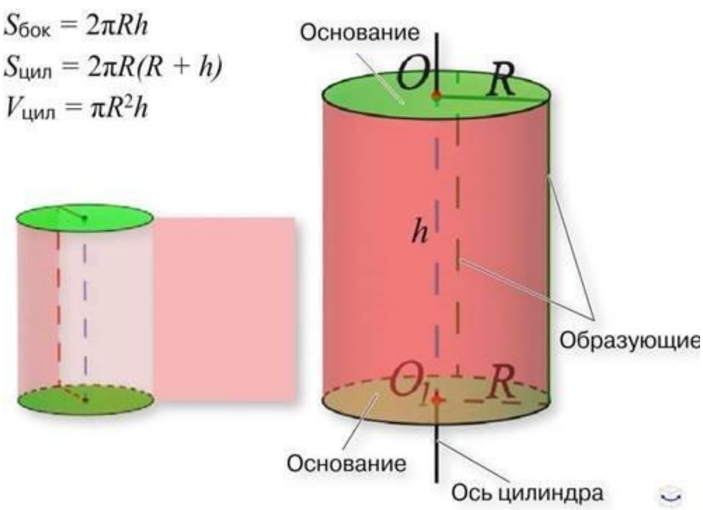
$S_{\text{основания}} = \pi R^2 = 4\pi \rightarrow \ R = 2$

$S_{\text{осевого сечения } ABCD} = 2R \cdot h$. Так как $ABCD -$ квадрат, то $R = h = 2$

$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi.$

$S_{\text{полной поверхности}}=S_{\text{боковой поверхности}} + 2S_{\text{основания}} = 16\pi$

Ответ. $16\ \pi$

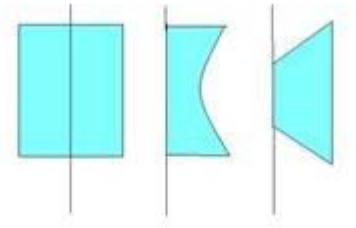


1)

радиус	образующая	диаметр	высота	Площадь основания	Площадь полной поверхности
	5	10			
			8	$\pi 9^2$	

Расчеты производить обязательно ниже таблицы.

2)



Нарисуйте тела вращения, образованные вращением плоских фигур, изображенных на рисунке.

3)Радиус основания цилиндра 2 см, высота 3 см. Найдите диагональ осевого сечения.

4)Осевое сечение цилиндра - квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите площадь основания цилиндра.

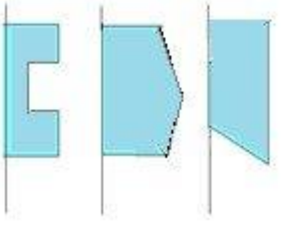
5) В цилиндре с высотой 6 см проведено параллельно оси сечение, отстоящее от неѐ на расстоянии 4 см. Найдите радиус цилиндра, если площадь сечения равна 36 $см^2$.

6) Площадь осевого сечения цилиндра равна 20 $см^2$. Найдите площадь его боковой поверхности.

1

радиус	образующая	диаметр	высота	Площадь основания	Площадь полной поверхности
	6	12			
			10	$\pi 5^2$	

Расчеты производить обязательно ниже таблицы.



2)

Нарисуйте тела вращения, образованные вращением плоских фигур, изображенных на рисунке.

3)Радиус основания цилиндра 3 см, высота 8 см. Найдите диагональ осевого сечения.

4)Осевое сечение цилиндра - квадрат, диагональ которого равна 10 см. Найдите площадь основания цилиндра.

5) В цилиндре с высотой 6 см проведено параллельно оси сечение, отстоящее от неѐ на расстоянии 4 см. Найдите радиус цилиндра, если площадь сечения равна 54 $см^2$.

6) Площадь осевого сечения цилиндра равна 40 $см^2$. Найдите площадь его боковой поверхности.

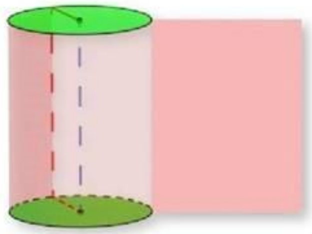
Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»
Тема: «Объѐм цилиндра.»
Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение объѐмов тел вращения.
Методические указания.
Пример.
Дан цилиндр. Площадь осевого сечения равна 24. Площадь основания равна $4\pi.$ Найти объём цилиндра.
Решение.

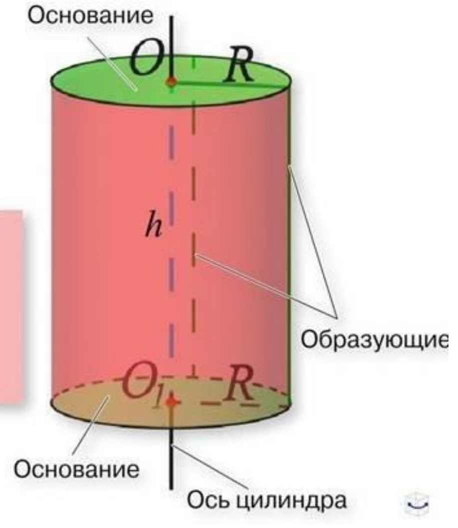
$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh. S_{\text{основания}} = \pi R^2$
$S_{\text{осевого сечения } ABCD} = 2R \cdot h$
$R = 2, h = 6, \quad V = 24\pi$
Ответ. $24\ \pi$

$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$

$S_{\text{цил}} = 2\pi R(R + h)$

$V_{\text{цил}} = \pi R^2 h$





Самостоятельная работа.
1) Объѐм цилиндра, у которого высота вдвое больше диаметра основания, равен 1 $м^3$. Вычислите его высоту.
2) Высота цилиндра равна 10 см, диагональ осевого сечения составляет угол в 45^0 с плоскостью основания. Найдите объѐм цилиндра.
3) Радиус основания цилиндра равен 4 см, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите объѐм цилиндра.
4) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. Найдите объѐм цилиндра.
5) Найдите объѐм тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4см и 6 см вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.
6) Площадь осевого сечения цилиндра равна 64 $см^2$, а его образующая равна диаметру основания. Найдите объѐм цилиндра.
7) Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания цилиндра равен 2. Объѐм параллелепипеда равен 80. Найдите высоту цилиндра.

8) Объѐм цилиндра равен 24 $см^3$. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объѐм получившегося цилиндра. Ответ дайте в $см^3$.
9) Объѐм цилиндра равен 20 $см^3$. Радиус основания цилиндра увеличили в 3 раза, а образующую уменьшили в 4 раз. Найдите
объѐм получившегося цилиндра. Ответ дайте в $см^3$.
10) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 64 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если еѐ перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 4 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Вариант 2.

1) Объём цилиндра, у которого высота вдвое больше диаметра основания, равен 8 $м^3$. Вычислите его высоту.

2) Высота цилиндра равна 20 см, диагональ осевого сечения составляет угол в 45^0с плоскостью основания. Найдите объём цилиндра.

3) Радиус основания цилиндра равен 6 см, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите объём цилиндра.

4) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$см. Найдите объём цилиндра.

5) Найдите объём тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 3см и 6 см вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.

6) Площадь осевого сечения цилиндра равна 81 $см^2$, а его образующая равна диаметру основания. Найдите объём цилиндра.

7) Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания цилиндра равен 2. Объём параллелепипеда равен 80. Найдите высоту цилиндра.

8) Объём цилиндра равен 24 $см^3$. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объём получившегося цилиндра. Ответ дайте в $см^3$.

9) Объём цилиндра равен 20 $см^3$. Радиус основания цилиндра увеличили в 3 раза, а образующую уменьшили в 4 раз. Найдите
объём получившегося цилиндра. Ответ дайте в $см^3$.

10) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 64 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 4 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Критерии оценок: 100% заданий-«5», 99%-85% заданий –«4»,84%-70% заданий –«3»

Тема: «Площадь поверхности конуса.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение площадей поверхности тел вращения.

Методические указания

Конус

Пример.

Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите площадь полной поверхности, полученного вращением треугольника вокруг катета 4см.

Решение.

О

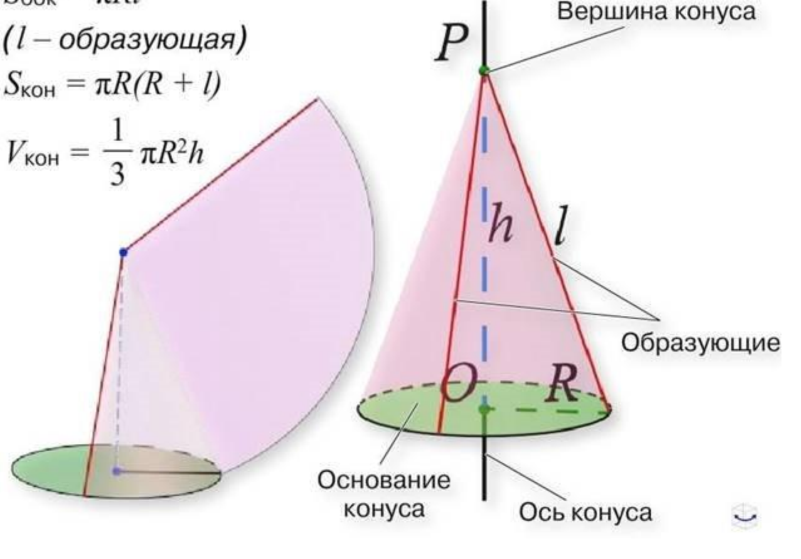
твет: 24π $см^2$.

$S_{бок} = \pi R l$

(l – образующая)

$S_{кон} = \pi R(R + l)$

$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



Самостоятельная работа.

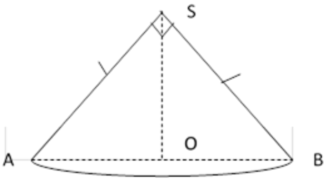
Вариант №1

1) Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса.
2) Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите площадь основания конуса.
3) Заполните таблицу, зная, что в ней говорится о конусе:

R-радиус конуса	ℓ- образующая конуса	Dдиаметр конуса	Н- высота конуса	$S_{осн}$- площадь основания	$S_{полная\ поверхность}$ Площадь полной поверхности
	17	16			
			5	144π	

4) Образующая конуса равна 60 см, высота 30 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
5) Осевое сечение конуса- равносторонний треугольник со стороной 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

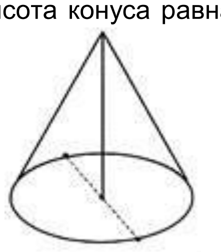
6)Осевое сечение конуса- прямоугольный треугольник с гипотенузой $\sqrt{\ }$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



7) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 30^0, а радиус основания конуса равен 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

8) Высота конуса равна 8 см, объём $24\,\pi\ см^3$. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9) Высота конуса равна 8, а длина образующей – 10. Найдите диаметр основания



конуса

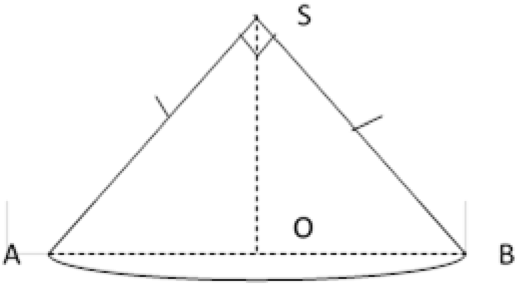
Вариант №2

1) Высота конуса равна 10 см, а радиус основания равен 24 см. Найдите образующую конуса.
2) Образующая конуса, равная 14 см, наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите площадь основания конуса.
3) Заполните таблицу, зная, что в ней говорится о конусе:

R-радиус конуса	ℓ- образующая конуса	Dдиаметр конуса	Н- высота конуса	$S_{осн}$- площадь основания	$S_{полная\ поверхность}$ Площадь полной поверхности
	10	12			
			12	25π	

4) Образующая конуса равна 50 см, высота 30 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
5) Осевое сечение конуса- равносторонний треугольник со стороной 8 см. Найдите площадь боковой поверхности.

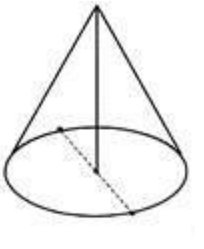
6)Осевое сечение конуса- прямоугольный треугольник с гипотенузой $\sqrt{\ }$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



7) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 30^0, а радиус основания конуса равен 8 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

8) Высота конуса равна 6 см, объём $24\,\pi\text{ см}^3$. Найдите площадь полной поверхности конуса.

9) Высота конуса равна 30, а длина образующей – 34. Найдите диаметр основания конуса



Критерии оценок: 9 заданий-«5»,8-7заданий –«4»,6заданий –«3»

Тема: «Объѐм конуса.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение объѐмов тел вращения.

Методические указания

Конус

Пример.

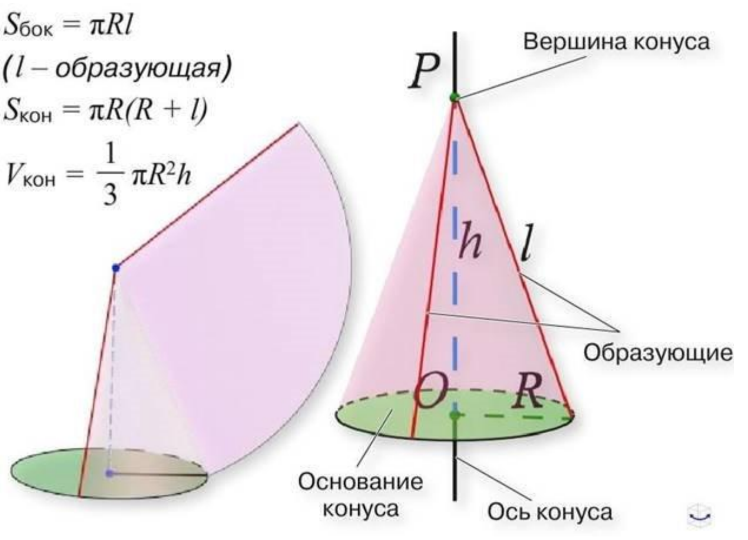
Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите объём тела, полученного вращением треугольника вокруг катета 4см.

Решение.

$$\text{OB} - \text{ радиус конуса}(R = 3\text{ см}), \quad OS - \text{высота конуса }(\text{H} = 4\text{см})$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 4 = 12\pi\text{ см}^3.$$

Ответ: $12\pi\text{ см}^3.$

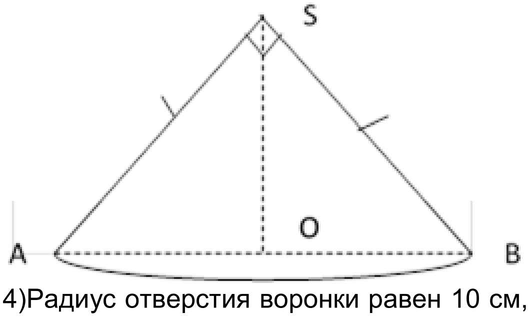


Самостоятельная работа.

Вариант №1

1) Образующая конуса равна 60 см, высота 30 см. Найдите объём конуса.
2) Осевое сечение конуса- равносторонний треугольник со стороной 6 см. Найдите объём.

3)Осевое сечение конуса- прямоугольный треугольник с гипотенузой $\sqrt{\ }$ см. Найдите объём конуса.



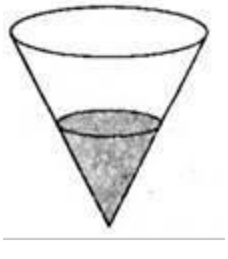
4)Радиус отверстия воронки равен 10 см, глубина её равна 15 см. Принимая воронку за конус, вычислите её объём.

5)Определите вес медной конической детали, если радиус её основания равен 30 мм, а образующая конуса равна 50 мм , плотность меди равна 0,0089 г/$мм^3$.

6) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 30^0, а радиус основания конуса равен 6 см. Найдите объём конуса.

7) Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём конуса, если объём цилиндра равен 24

8) В сосуд, имеющий форму конуса, налили 75 мл жидкости до половины высоты сосуда. Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы

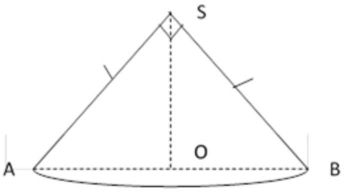


заполнить его доверху?

Вариант №2

1) Образующая конуса равна 50 см, высота 30 см. Найдите объём конуса.
2) Осевое сечение конуса- равносторонний треугольник со стороной 8 см. Найдите объём.

3)Осевое сечение конуса- прямоугольный треугольник с гипотенузой $\sqrt{\ }$ см. Найдите объём конуса.



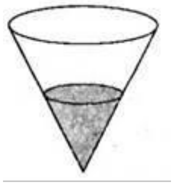
4)Радиус отверстия воронки равен 9 см, глубина её равна 24 см. Принимая воронку за конус, вычислите её объём.

5)Определите вес медной конической детали, если радиус её основания равен 60 мм, а образующая конуса равна 100 мм , плотность меди равна 0,0089 г/мм^3.

6) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 30^0, а радиус основания конуса равен 8 см. Найдите объём конуса.

7) Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём конуса, если объём цилиндра равен 42

8) В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда. Сколько миллилитров жидкости



нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?

Критерии оценок: 8 заданий-«5»,7 заданий –«4»,6 заданий –«3»

Тема: «Шар. Шаровой сегмент. Шаровой сектор.»

Цель: освоить навыки решения задач по стереометрии на нахождение объѐмов и площади поверхностей тел вращения.

Методические указания.

Шаровой сегмент $V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh, h - \text{высота сегмента}$$

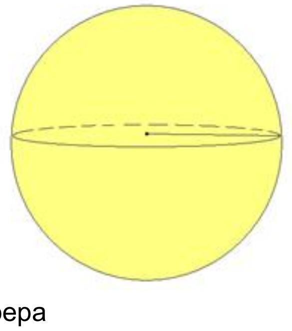
Шаровой сектор $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

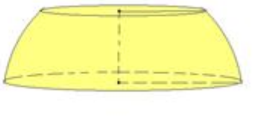
$$S_{\text{полн}} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2})$$

Шаровой слой

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$



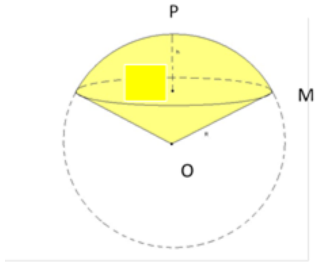


Сфера

Самостоятельная работа.

Вариант №1

1).



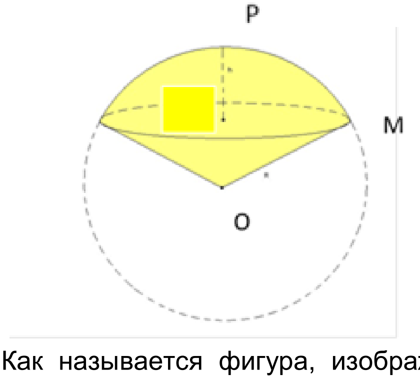
Как называется фигура, изображенная на рисунке. Радиус окружности основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см. Найдите объем фигуры.

2).Диаметр шара равен 30 см. Определите, сколько шаров с диаметром 3 см можно изготовить.
3). Внешний диаметр полого шара равен 18 см, толщина стенок – 3 см. Найдите объём материала из которого изготовлен шар.
4). Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5м и высотой 60см ?

5).Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным 6400 км.)

Вариант №2

1).



Как называется фигура, изображенная на рисунке. Радиус окружности основания равен 60 см, а радиус шара равен 85 см. Найдите объем фигуры.
2).Диаметр шара равен 50 см. Определите, сколько шаров с диаметром 3 см можно изготовить.
3). Внешний диаметр полого шара равен 20 см, толщина стенок – 1 см. Найдите объём материала из которого изготовлен шар.
4). Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 10м и высотой 50см ?
5). Диаметр Меркурия 4878 км . Найдите площадь поверхности и объём планеты.

Критерии оценок: 5 заданий-«5»,4 заданий –«4»,3 заданий –«3»

Тема: *«Вычисление площади боковой поверхности конуса».*

Цель: Вывести формулу для нахождения площади боковой поверхности конуса.

1. **Оборудование:** модели, чертежи.
2. **Ход работы:**
3. 1. Изобразить конус и указать его элементы на рисунке.

2. Представим, что боковую поверхность разрезали по образующей и развернули таким образом, что все образующие оказались, расположены в некоторой плоскости α. Тем самым мы получим развёртку боковой поверхности конуса.

Выполнить чертёж, соответствующий данной развёртке.

3. Что является разверткой боковой поверхности конуса?

4. Что представляют элементы получившегося кругового сектора?

(каким элементам конуса соответствуют элементы получившегося кругового сектора?) 5. Ввести обозначение элементов конуса и развёртки его боковой поверхности (обозначить на рисунке):

………. – образующая конуса

r = …... - радиус конуса

h = …… - высота конуса

6. Установить зависимость между площадью боковой поверхности конуса и площадью её развёртки.

$S_{кр.\ сект.}$ ……… $S_{бок}$

7. Записать формулу для нахождения площади кругового сектора:

$S_{кр.сект.}$ =

…………………………………,

где α градусная мера дуги ……………………………………….

8. Записать формулу для вычисления площади боковой поверхности конуса радиуса r и высоты h:

9. Выразите α через образующую *l* и радиус основания *r*

………………………………………………………………………………

10. Подставьте полученное выражение в формулу для нахождения площади боковой поверхности конуса (пункт 8)

$S_{бок}$ =

Вывод: Сформулировать теорему о площади боковой поверхности цилиндра.

……………………………………………………………………………..

Тема: *«Вычисление площади боковой поверхности конуса».*

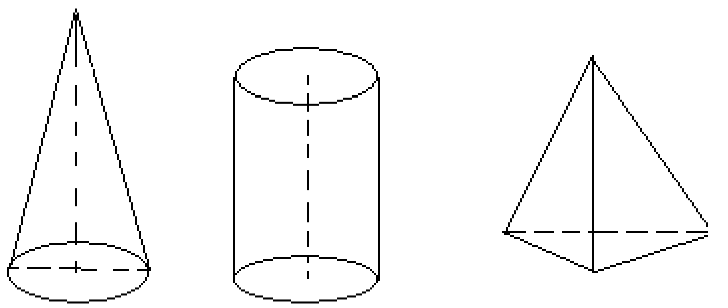
Цель: Вывести формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.

Оборудование: модели, чертежи.

Ход работы:

1. На каком из рисунков изображён конус?

Указать элементы конуса, используя данные рисунка.



2. Разрежьте боковую поверхность конуса по образующей. Какая фигура получилась? Начертите.

3. Что представляют элементы получившегося кругового сектора?

(каким элементам конуса соответствуют элементы получившегося кругового сектора?)

……………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

4. Ввести обозначение элементов конуса и развёртки его боковой поверхности (обозначить на рисунке):

………. – образующая конуса

r = …... - радиус конуса

h = …… - высота конуса

5. Установить зависимость между площадью боковой поверхности конуса и площадью её развёртки.

$S_{кр.\ сект.}$ ……… $S_{бок}$

6. Записать формулу для нахождения площади кругового сектора:

$S_{кр.сект.}$ =

…………………………………,

где α градусная мера дуги ……………………………………….

7. Записать формулу для вычисления площади боковой поверхности конуса радиуса r и высоты h:

$S_{бок}$ =

…………………………………..

8. Выразите α через образующую *l* и радиус основания *r*

………………………………………………………………………………

9. Подставьте полученное выражение в формулу для нахождения площади боковой поверхности конуса (пункт 7)

$S_{бок}$ =

…………………………………..

Вывод: Сформулировать теорему о площади боковой поверхности цилиндра.

………………………………………………………………………………..

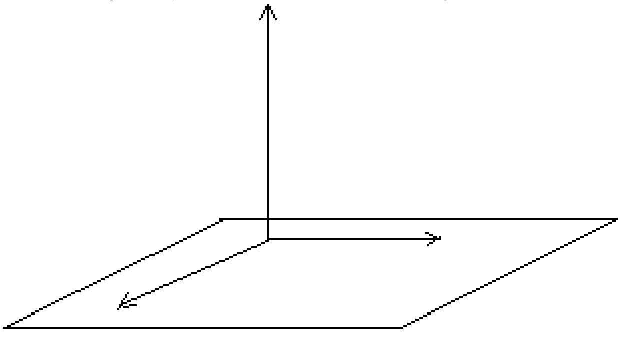
Тема: *Взаимное расположение сферы и плоскости.*

Цель: Исследовать взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центра до плоскости.

Оборудование: Модели сферы, плоскости, чертежи.

Ход работы:

1. Рассмотрим сферу радиуса R и с центром С. Расстояние от центра С до плоскости α обозначим буквой d.
2. Введём систему координат. Плоскость Oxy совпадает с плоскостью α.



Центр сферы лежит на положительной полуоси Oz.

3. Записать координаты центра сферы С(…………).
4. Записать уравнение сферы с центром в точке С и радиуса R

…………………………………………………………………..

5. Записать уравнение плоскости α ……………………………

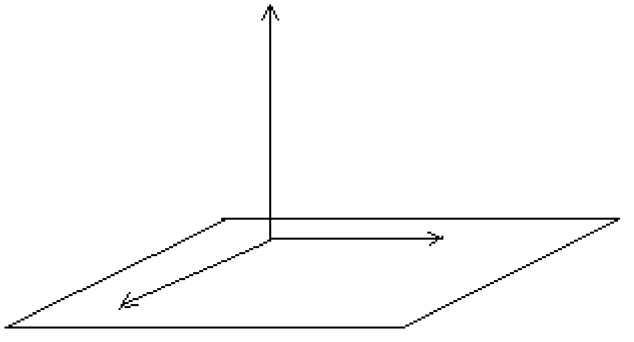
Рассмотрим решение системы уравнений: плоскости α и данной сферы

……………………………………………………………………..

1. При $z = 0$ имеем уравнение

…………………………………………………………………

2. Рассмотрим три случая: а) Выполнить рисунок, если $d < R$.



Определить знак разности $R^2 - d^2$……………………………

определить вид, получившегося уравнения: $x^2+y^2= R^2 - d^2$

Это уравнение - ………………………………………………

…………………………………………………………………

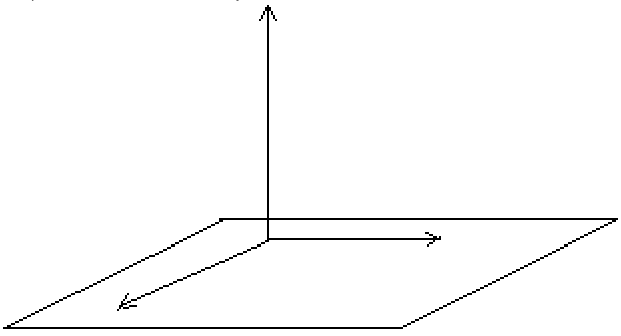
…………………………………………………………………

Вывод: если $d < R$, то сфера и плоскость ………………..

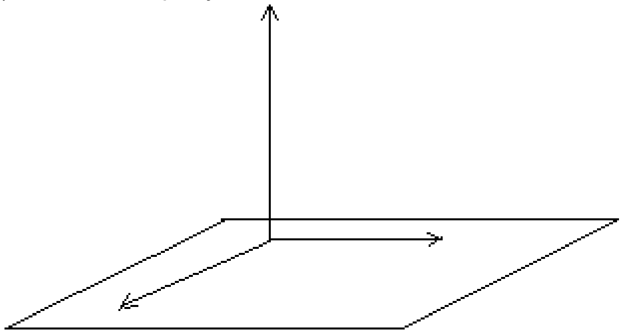
……………………………………………………………………..

сечение сферы плоскостью есть ……………………………..

б) Выполнить рисунок, если $d = R$.



Определить значение разности $R^2 – d^2$………………………
определить вид, получившегося уравнения: $x^2+y^2= R^2 – d^2$
Этому уравнению удовлетворяют координаты ……………
………………………………………………………………….
Точка ….. - ………………………………………………..
сферы и плоскости.
Вывод: если $d = R$, то сфера и плоскость ………………..
………………………………………………………………..
1. в) Выполнить рисунок, если $d \succ R$.



Определить знак разности $R^2 – d^2$……………………………
определить вид, получившегося уравнения: $x^2+y^2= R^2 – d^2$
Этому уравнению …………………………………………..
………………………………………………………………….
………………………………………………………………….
Вывод: если $d \succ R$, то сфера и плоскость ………………..
………………………………………………………………..

Тема: *<u>«Вычисление площади боковой поверхности цилиндра».</u>*

Цели: 1. Вывести формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.
2. Сформулировать теорему о площади боковой поверхности цилиндра.

Оборудование: модели, чертежи.

Ход работы:

1. Изобразить цилиндр и указать элементы цилиндра на рисунке.
2. Представим, что боковую поверхность разрезали по образующей и развернули таким образом, что все образующие оказались, расположены в некоторой плоскости α. Тем самым мы получим развёртку боковой поверхности цилиндра.
Выполнить чертёж, соответствующий данной развёртке.
3. Какая фигура получилась? ………………………………………………..
4. Что представляют стороны получившегося прямоугольника?
(каким элементам цилиндра соответствуют стороны получившегося прямоугольника?)
………………………………………………………
5. Ввести обозначение элементов цилиндра и развёртки его боковой поверхности (обозначить на рисунке):
………. – образующая цилиндра
r = …... - радиус цилиндра
h = …… - высота цилиндра
6. Установить зависимость между площадью боковой поверхности цилиндра и площадью её развёртки.
$S_{\square}$ ……… $S_{бок}$
7. Вычислить площадь прямоугольника:
$S_{\square}$ = ……………………………………………………………………

8. Записать формулу для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h:

$S_{бок}$ = ………………………………………………………………………

Сформулировать теорему о площади боковой поверхности цилиндра.

………………………………………………………………………………..

Тема: *«Вычисление площади боковой поверхности цилиндра».*

Цели: 1. Вывести формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.

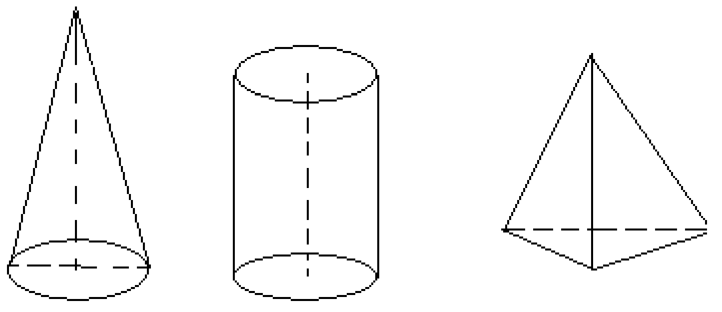
2. Сформулировать теорему о площади боковой поверхности цилиндра.

Оборудование: модели, чертежи.

Ход работы:

1. На каком из рисунков изображён цилиндр?

Указать элементы цилиндра, используя данные рисунка.



2. Разрежьте боковую поверхность цилиндра по образующей. Какая фигура получилась? Начертите.

3. Каким элементам соответствуют стороны получившегося прямоугольника?

………………………………………………………..

4. Ввести обозначение элементов цилиндра и развёртки его боковой поверхности (обозначить на чертеже):

………. – образующая цилиндра

r = …... - радиус цилиндра

h = …… - высота цилиндра

5. Установить зависимость между площадью боковой поверхности цилиндра и площадью её развёртки.

$S_{\square}$ ……… $S_{бок}$

6. Записать формулу для нахождения площади прямоугольника:

$S_{\square}$ = ………………….

7. Записать формулу для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h:

$S_{бок}$ = ………………………………….

Сформулировать теорему о площади боковой поверхности цилиндра.

………………………………………………………………………………..

Тема: *Задачи на построение сечений.*

Цель: Совершенствовать навыки решения задач на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Оборудование: Модели, чертежи.

Ход работы:

1. Изобразите тетраэдр $FEQL$ и постройте его сечение плоскостью *ABC*, где точки *A, B, C* лежат соответственно на ребрах *FQ, EQ, EL*.

2. Вырежьте развертку № 1, аккуратно согните по линиям и склейте. Получится две части тетраэдра, рассеченного плоскостью. Сложите из них тетраэдр с сечением $ABCD$.

3. Изобразите параллелепипед $ANMPA_1N_1M_1P_1$ и постройте его сечение плоскостью *ABC*, где точка *B* лежит на ребре PP_1, а точка *C* – середина ребра P_1M_1.

3. 4. Вырежьте развертку № 2, аккуратно согните по линиям и склейте. Получится две части параллелепипеда, рассеченного плоскостью. Сложите из них параллелепипед с сечением $ABCDE$.
4. Я выполнил задания на оценку…………………………………
5. Я испытал трудности при ………………………………………
6. ……………………………………………………………………….
7. Задания были: легкие, трудные, мне под силу (нужное подчеркнуть).

Тема: *Объёмы многогранников и тел вращения.*

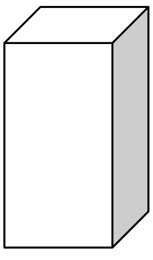
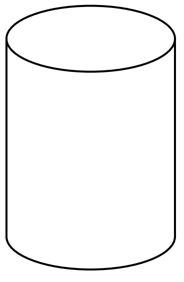
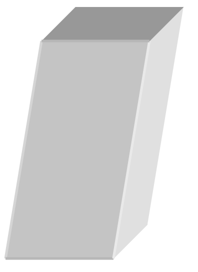
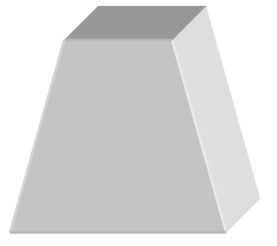
Цели: 1.Развивать умение вычислять объёмы многогранников и тел вращения, применяя изученные свойства и формулы.

2.Совершенствовать практические навыки вычисления объёмов многогранников и тел вращения в ходе решения задач.

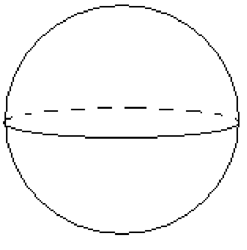
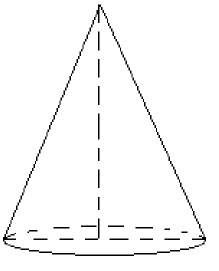
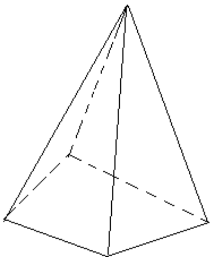
Оборудование: Модели, чертежи.

Ход работы:

1. Записать формулы для вычисления объёмов тел:

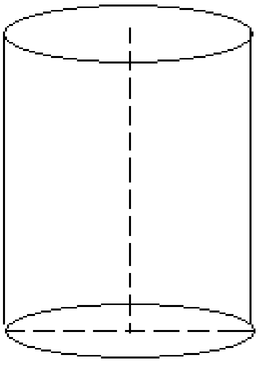
   

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________

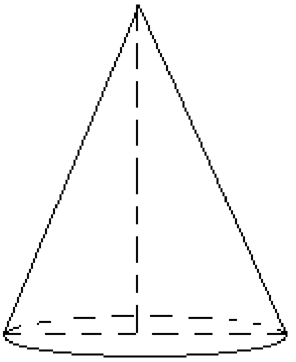
тел вращения:



Дано: цилиндр,
r = 5см,
h = 12.5 см
Найти: V
Решение:
………………………………………………..
…………………………………………………………
……………………………………
Ответ: ………………..

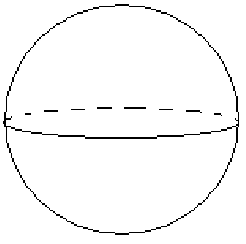
а)

………………………………………………………………



Дано:
конус, r = 3м,
h = 7 м
Найти: V
Решение:
…………………………………………………………
…………………………………………………………
……………………………
Ответ: …………………

б)



Дано:
шар, R = 2 см
Найти:V
Решение:
……………………………………………………
……………………………………………………
………………………………
Ответ: ………………………..

в)

3. Вычислить объёмы многогр ив чертеж.

а) Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. Найдите объём цилиндра.
б) Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и8 см. Найдите объём пирамиды, если её боковые ребра равны 13 см.
в) На расстоянии 12 см от центра шара проведено сечение, радиус которого равен 9 см. Найдите объём шара.
г) Найдите объём фигуры, полученной вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ см вокруг одного из катетов.

4. Я выполнил задания на оценку…………………………………
Я испытал трудности при ………………………………………
…………………………………………………………………….
Задания были: легкие, трудные, мне под силу (нужное подчеркнуть).

Тема: *Правильные многогранники.*

Цели: 1. Ввести понятие правильного многогранника; доказать существование конечного количества правильных многогранников; выделить элементы правильных многогранников; доказать, что для правильных многогранников верна эйлерова характеристика.
2. формировать понятие о правильных многогранниках и умения видеть их в окружающем мире;
3. выработать практические навыки построения правильных многогранников; изготовления моделей правильных многогранников.

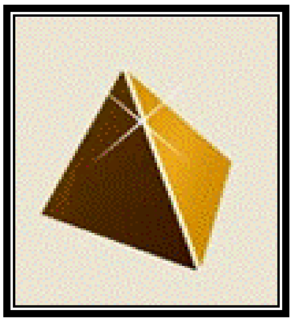
Оборудование: Модели, чертежи.

Форма проведения работы: I этап – совместная работа, II этап – работа в группах, III этап – защита выполненного задания.

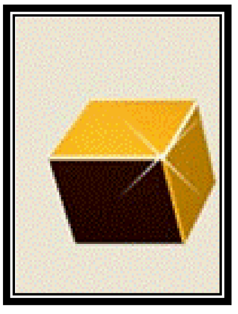
Ход работы:

I этап.

1. Записать определение правильного многогранника.
   Многогранник называется правильным, если его грани - ………… ....
   многоугольники и в каждой вершине сходится дно и то же число ……………………..
2. Перечислить свойства правильного многогранника:
   А) все ребра правильного многогранника ………………………..
   ……………………………………………………………………..
   Б) все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром -
   ……………………………………………………………………..
3. Перечислить правильные многогранники

А)  …………………………………………..

Грани - ……………………………………………………………..

Б)  …………………………………………..

Грани - ……………………………………………………………..

В)  …………………………………………..

Грани - ……………………………………………………………..

Г)  …………………………………………..

Грани - ……………………………………………………………..

Д)  …………………………………………..

Грани - ……………………………………………………………..

Угол правильного ***n***-угольника равен $\alpha = \frac{180^0(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots}$

	Правильный ***n***-угольник			
	n = 3	***n*** = 4	***n*** = 5	***n*** = 6
Градусная мера угла правильного ***n***-угольника				

Пусть при вершине сходится ***n*** ребер, тогда плоских углов при этой вершине ….., причем они все …………….. между собой.

Пусть один из углов из этих плоских углов равен ***x***, тогда сумма плоских углов при вершине ………, и по свойству многогранного
угла получим ***nx***….. 360^0, откуда х …......

	Количество плоских углов при одной вершине				
	3	4	5	6	7
Градусная мера одного угла меньше					

II этап. Групповая работа

1 группа.

<u>Задание:</u> Доказать, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и ***n***-угольники при ***n***≥6.

Доказательство:

Угол правильного ***n***-угольника при ***n***≥6 не меньше …….^{0}. С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее ……плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани - ……………………. ***n***-угольники при ***n***≥6, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше …………………………..

По свойству многогранного угла: сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника ………………………..

Вывод: ………………………………………………………………………..

2 группа.

<u>Задание:</u> Доказать, что существует всего 5 правильных многогранников

Доказательство:

Форма граней	Градусная мера плоского угла	Число ребер при одной вершине	Сумма плоских углов при одной вершине	Противоречит ли теореме о сумме плоских углов многогранного угла	Число граней такого многогранника	Название правильного многогранника
Правильный треугольник		3				
		4				
		5				
		6				
Правильный четырехугольник (………….)		3				
		4				
Правильный пятиугольник		3				
		4				

Вывод: ……………………………………………………………………….

3 группа.

<u>Задание:</u> Доказать, что Эйлерова характеристика справедлива для всех правильных многогранников.

Правильный многогранник	Форма грани	Число			Эйлерова характеристика ………………
		граней	вершин	рёбер	
Тетраэдр					
Куб					
Октаэдр					
Додекаэдр					

Икосаэдр					

Вывод: ……………………………………………………………………….

4 группа.

Задание: Вывести формулы для нахождения площадей правильных многогранников.

Правильный многогранник	Форма грани	Число граней	Площадь одной грани	Площадь поверхности правильного многогранника
Тетраэдр				
Куб				
Октаэдр				
Икосаэдр				

Вывод: ……………………………………………………………………….

Я выполнил(а) задания на оценку …………………………………………

Я испытал(а) трудности при ……………………………………………..

……………………………………………………………………………..

Задания были: легкие, трудные, мне под силу (нужное подчеркнуть) ….

……………………………………………………………………………..

Тема: *«Признак перпендикулярности двух плоскостей».*

Цели: 1. Сформулировать и доказать признак перпендикулярности двух плоскостей

2. Практическим путём определить основные понятия, признаки, доказать теоремы.

Оборудование: модели, чертежи.

Ход работы:

1. Смоделировать случай, когда плоскость α проходит через прямую АВ, перпендикулярную плоскости β . (Сделать чертёж. $A \in \beta$). Записать

Дано: …………..

2. Каково взаимное расположение плоскостей α и β ?

……………………………………………………………………………

3. Обозначьте линию пересечения плоскостей АС.

4. Каково взаимное расположение прямых АВ и АС? Ответ обоснуйте.

…………………………………………………………………………..

5. Проведите $AD \perp AC$, $AD \in \beta$.

6. Запишите двугранный угол, образованный при пересечении плоскостей α и β

…………………………………………………….

Чему равна его градусная мера? Ответ обоснуйте.

……………………………………………………………………………

7. Сделайте вывод о взаимном расположении α и β .

……………………………………………………………………………

Вывод:

Сформулировать признак перпендикулярности двух плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, ………………

…………………………….. к другой ……………………, то такие плоскости …………………………………

Тема: *«Признак скрещивающихся прямых».*

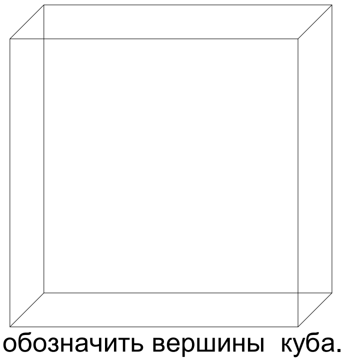
Цели: 1. Сформировать конструктивный навык определения и нахождения скрещивающихся прямых.

2. Практическим путём определить основные понятия, признаки, доказать теоремы.

Оборудование: модели, чертежи.

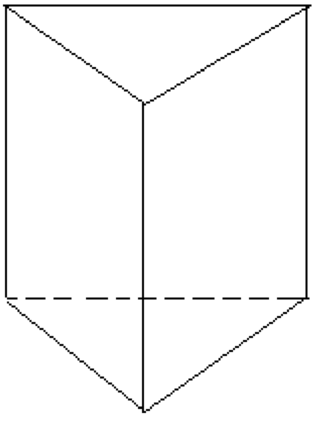
Ход работы:

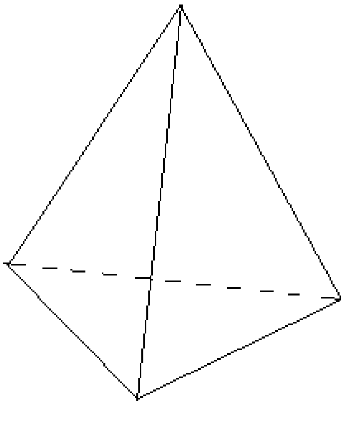
1. Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости? Сделать рисунок для каждого возможного случая.
2. Каково может быть взаимное расположение прямых в пространстве? Сделать рисунок для каждого возможного случая.



1. На чертеже обозначить вершины куба. Найти примеры взаимного расположения прямых в пространстве (для всех случаев из пункта 2).
   Например:……………………………………………………………………………………………………
   ………
   На модели куба $ABCD_{A1B1C1D1}$ определить взаимное расположение прямых A_{A1} и BC. Сформулировать определение для этого случая
   ………
   ………

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
а) Определить взаимное расположение рёбер AA_1 и DC
…………………………………………………………
б)В каких плоскостях лежит прямая DC?
....
в) Как располагается прямая AA_1 по отношению к этим плоскостям и прямой DC? ………
…………………………………………………………

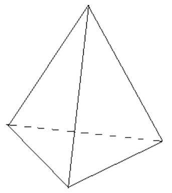




3. $ABCA_1B_1C_1$ – призма. а) Определить взаимное расположение рёбер BB_1 и AC
   ………
   б) В каких плоскостях лежит прямая BB_1? ....
   ……………
   в) Как располагается прямая AC по отношению к этим плоскостям и прямой BB_1?
   ………

ABCP – пирамида.
а) Найти пары скрещивающихся прямых
…………………...………………………………………………………………………………………
б) Установить признак скрещивающихся прямых
Вывод.
Сформулировать признак скрещивающихся прямых.
…………………………………………………………………….
<u>Дополнительно.</u>

1. Какая плоскость проходит через прямую AC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельно DC?
   ………………………………………………………………… Сколько таких плоскостей?
   …………………………………………………………………
2. Какая плоскость проходит через прямую A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ параллельно BB_1?
   ………………………………………………………………… Сколько таких плоскостей?
   …………………………………………………………………
3. Можно ли через одну из скрещивающихся прямых AB и CP пирамиды ABCP провести плоскость параллельную другой прямой? Если возможно, то построить эту плоскость.



Вывод: …………………………………………………………………….

Тема: *Прямоугольный параллелепипед.*

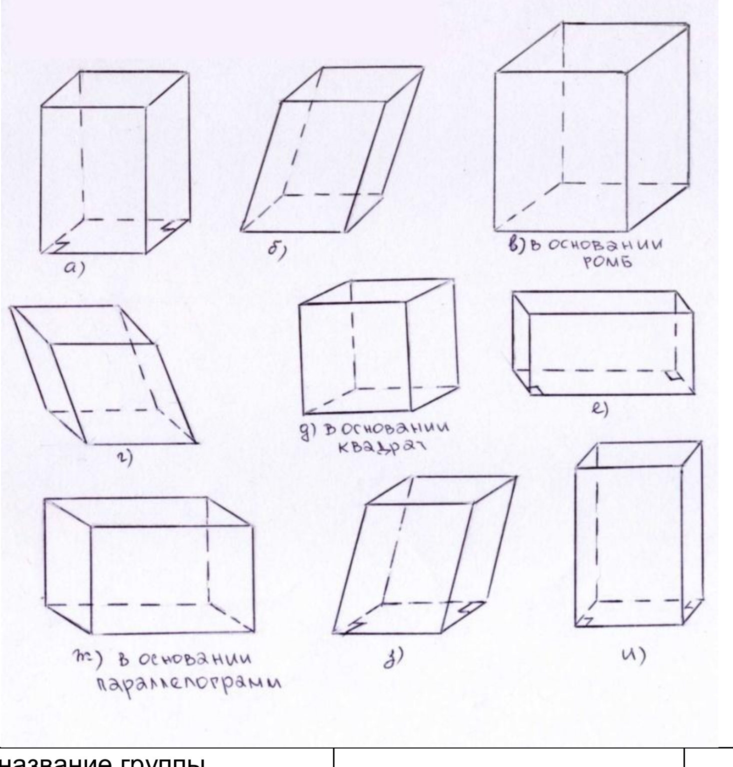
Цели: - ввести понятие прямоугольного параллелепипеда;

- сформулировать и доказать (выборочно) свойства прямоугольного параллелепипеда

Оборудование: Модели, чертежи.

Ход работы:

1. Разбить параллелепипеды на группы.



название группы		
номера параллелепипедов		

2. Группу, состоящую из прямых параллелепипедов разбить на группы.

группа	№1 (в основании прямоугольник)	№2 (в основании не прямоугольник)
номера параллелепипедов		

3. Дать определение прямоугольного параллелепипеда (группа №1).

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра ……………………….. *к основанию, а основания представляют собой*
………………………………………………………………………………

4. Построить прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перечислить элементы параллелепипеда

основания: ……………………………………………………………..

боковые грани: ………………………………………………………..

боковые ребра: ………………………………………………………..

диагонали: ……………………….……………………………………

5. Определить взаимное расположение боковых рёбер и оснований прямоугольного параллелепипеда. ……………………………………….

Следовательно, боковые грани являются ………………………………

6. Сформулировать и доказать (по выбору) свойство прямоугольного параллелепипеда, используя для их открытия аналогию с прямоугольником.

прямоугольник	прямоугольный параллелепипед

В прямоугольнике все углы прямые.	……………………………………... ……………………………………… ………………………………………
В прямоугольнике диагонали равны.	……………………………………… ……………………………………… ………………………………………
В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов его смежных сторон ($d^2 = a^2 + b^2$)	……………………………………… ……………………………………… ……………………………………… ……………………………………… ………………………………………

Доказательство оного из свойств (по выбору).

Раздел III. Вероятность и статистика

1. Элементы комбинаторики

<u>Тема:</u> Решение задач на перебор вариантов

<u>Цель:</u>

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

<u>Оборудование:</u> калькуляторы.

<u>Краткий теоретический обзор:</u>

Размещения P!=n!

Перестановки $A_n^k != \frac{n!}{(n-k)!}$

Сочетания $C_n^k != \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Задания

Вариант 1(слева)

№1. **В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет, состоящий из**

двух белых роз и одной красной розы.

двух красных и одной белой розы.

Даны цифры 1, 2, 5, 8, 9. Определите, сколько четырехзначных чисел можно составить из них (цифры в одном числе не должны повторяться) при условии, что все составленные числа должны быть

меньше 6000. | больше 4000.

❸

Три стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут разделить мишени между собой?

❸

Три автора должны составить справочник из 9 глав (каждый составляет по 3 главы). Сколькими способами они могут разделить работу?

№2 №4

12 человек разделены на группы

по 4 человека в каждой. | по 3 человека в каждой.

Сколькими способами это можно сделать?

№5

Шестерых новых учеников нужно распределить в три параллельных класса. Сколькими способами это можно сделать?

Семь книг необходимо разместить на четырех книжных полках. Сколькими способами это можно сделать?

Тема: Решение задач на перебор вариантов

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

Оборудование: калькуляторы.

Краткий теоретический обзор:

Размещения $P! = n!$

Перестановки $A_n^k != \frac{n!}{(n-k)!}$

Сочетания $C_n^k != \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Задания

Вариант 2(справа)

№1.

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими спосо-

бами из вазы можно выбрать букет, состоящий из

двух белых роз и одной красной розы.

двух красных и одной белой розы.

№2

Даны цифры 1, 2, 5, 8, 9. Определите, сколько четырехзначных чисел можно составить из них (цифры в одном числе не должны повторяться) при условии, что все составленные числа должны быть

меньше 6000.

больше 4000.

❸

Три стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут разделить мишени между собой?

❸

Три автора должны составить справочник из 9 глав (каждый составляет по 3 главы). Сколькими способами они могут разделить работу?

№4

12 человек разделены на группы

по 4 человека в каждой.

по 3 человека в каждой.

Сколькими способами это можно сделать?

№5

Шестерых новых учеников нужно распределить в три параллельных класса. Сколькими способами это можно сделать?

Семь книг необходимо разместить на четырех книжных полках. Сколькими способами это можно сделать?

Тема: Решение задач на перебор вариантов

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обуч-ся.

Оборудование: калькуляторы.

Краткий теоретический обзор:

Размещения P!=n!

Перестановки $A_n^k != \frac{n!}{(n-k)!}$

Сочетания $C_n^k != \frac{n!}{k!(n-k)!}$

I вариант.

1. Сократите дробь

а) $\frac{(n+1)!}{n!}$;

b) $\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!}$.

2. Найти

а) C_{15}^3;

b) $\frac{A_8^4 - A_8^3}{A_7^3 - A_7^2}$.

3. Сколько четных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 7?
4. В 11 «а» классе учатся 25 учащихся, в 11 «б» - 20 учащихся, а в 11 «в» - 18 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить трех учащихся из 11 «а», двух – из 11 «б» и одного – из 11 «в». Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?
5. Сколькими способами можно распределить 12 различных книг между четырьмя учащимися?
6. Вычислить а) $\frac{15!}{14!}$

б) $\frac{16!}{14!\cdot 3!}$

в) $7! - \frac{5!}{6!}$

7. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?
8. Вычислить: а) $A_7^3 - A_6^2$

б) $\frac{A_8^6}{A_{10}^2}$

9. Сколькими способами можно разместить семью из трех человек в четырехместное купе, если других пассажиров нет?
10. Вычислить: а) $C_{11}^5 - C_{11}^6$

б) $\frac{C_{10}^5}{C_{21}^5}$

Из вазы с фруктами, в которой лежат 9 яблок и 6 груш, необходимо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами это можно сделать?

II вариант.

1. Сократите дробь

а) $\frac{n!}{(n+2)!}$;

b) $\frac{(n+3)!}{n!(n+2)}$.

3. Найти

а) A_{15}^3;

b) $\frac{C_6^3 - C_6^2}{A_6^2}$.

3. Сколько четных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4?
4. В отделе работают 9 ведущих и 12 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?
5. Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из 10 волейболистов?
6. Вычислить а) $\frac{13!}{11!}$

   б) $\frac{26!}{24!\cdot 5!}$

   в) $5! - \frac{3!}{4!}$
7. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?
8. Вычислить: а) $A_5^2 - A_6^3$

   б) $\frac{A_{10}^3}{C_{10}^3}$
9. Из 30 учеников необходимо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
10. Вычислить: а) $C_9^4 - C_9^5$

    б) $\frac{C_{11}^4}{C_{12}^3}$

В театре 10 певцов и 8 певиц, а для исполнения оперы в хоре должно быть 5 мужских и 3 женских голоса. Сколько существует различных составов хора?

Задания

1. Вычислите: а) $\frac{7!+8!}{5!+6!}$

б) $\frac{17 * 6!+8!}{7!+9!}$

в) $\frac{7}{11} * \frac{(10!)^2 - (9!)^2}{(8!)^2 - (7!)^2}$

г) $\frac{(7!)^2 * (6!)^2}{4!* 5!* 8!* 9!}$

2. Вычислите: а) $\frac{1}{4!} + \frac{10}{5!} + \frac{630}{6!}$

б) $\frac{1}{6!} + \frac{1}{5!} + \frac{49}{7!}$

3. Вычислите: а) C_{17}^2

б) C_{100}^2

в) C_5^3

г) C_8^4

4. Вычислите: а) A_{10}^3

б) $\grave{A}_{8}^{5}$

в) $\grave{A}_{10}^{2}$

г) $\grave{A}_{100}^{15}$

5. Вычислите: а) $C_{27}^{2} - C_{26}^{2}$

б) $\dfrac{\grave{A}_{8}^{6}}{\grave{A}_{10}^{2}}$

в) $C_{11}^{5} + C_{11}^{6}$

г) $\dfrac{A_{10}^{3}}{C_{10}^{3}}$

6. Вычислите, а затем сравните: а) C_{17}^{3} или C_{18}^{4}

б) C_{18}^{4} или C_{19}^{5}

в) C_{19}^{5} или C_{18}^{6}

Задания

1. Вычислите: а) $\dfrac{7!+8!}{5!+6!}$

б) $\dfrac{17 * 6!+8!}{7!+9!}$

в) $\dfrac{7}{11} * \dfrac{(10!)^{2} - (9!)^{2}}{(8!)^{2} - (7!)^{2}}$

г) $\dfrac{(7!)^{2} * (6!)^{2}}{4!* 5!* 8!* 9!}$

2. Вычислите: а) $\dfrac{1}{4!} + \dfrac{10}{5!} + \dfrac{630}{6!}$

б) $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{49}{7!}$

3. Вычислите: а) C_{17}^{2}

б) C_{100}^{2}

в) C_{5}^{3}

г) C_{8}^{4}

4. Вычислите: а)$А_{10}^{3}$

б) $\grave{A}_{8}^{5}$

в) $\grave{A}_{10}^{2}$

г) $\grave{A}_{100}^{15}$

5. Вычислите: а) $C_{27}^{2} - C_{26}^{2}$

б) $\dfrac{\grave{A}_{8}^{6}}{\grave{A}_{10}^{2}}$

в) $C_{11}^{5} + C_{11}^{6}$

г) $\frac{A_{10}^{3}}{C_{10}^{3}}$

6. Вычислите, а затем сравните: а) C_{17}^{3} или C_{18}^{4}

б) C_{18}^{4} или C_{19}^{5}

в) C_{19}^{5} или C_{18}^{6}

Задания

1. Вычислите: а) $\frac{7!+8!}{5!+6!}$

б) $\frac{17 * 6!+8!}{7!+9!}$

в) $\frac{7}{11} * \frac{(10!)^2 - (9!)^2}{(8!)^2 - (7!)^2}$

г) $\frac{(7!)^2 * (6!)^2}{4! * 5! * 8! * 9!}$

2. Вычислите: а) $\frac{1}{4!} + \frac{10}{5!} + \frac{630}{6!}$

б) $\frac{1}{6!} + \frac{1}{5!} + \frac{49}{7!}$

3. Вычислите: а) C_{17}^{2}

б) C_{100}^{2}

в) C_{5}^{3}

г) C_{8}^{4}

4. Вычислите: а) A_{10}^{3}

б) A_{8}^{5}

в) A_{10}^{2}

г) A_{100}^{15}

5. Вычислите: а) $C_{27}^{2} - C_{26}^{2}$

б) $\frac{A_{8}^{6}}{A_{10}^{2}}$

в) $C_{11}^{5} + C_{11}^{6}$

г) $\frac{A_{10}^{3}}{C_{10}^{3}}$

6. Вычислите, а затем сравните: а) C_{17}^{3} или C_{18}^{4}

б) C_{18}^{4} или C_{19}^{5}

в) C_{19}^{5} или C_{18}^{6}

Задания

Вариант А1	**Вариант А2**

❶

Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что

Вариант А1	Вариант А2
а) в этом томе окажется роман «Анна Каренина», изданный в одном томе? б) этот том будет иметь четный номер?	а) в этом томе окажется роман «Война и мир», изданный в двух томах? б) этот том будет иметь нечетный номер?

❷

Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что

Вариант А1	Вариант А2
выпадут «орел» и «решка»?	выпадут два «орла»?

❸

Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить

Вариант А1	Вариант А2
слово «право».	слово «повар».

Из 28 костей домино наугад выбирают одну. Что вероятнее:

Вариант А1	Вариант А2
что сумма цифр на ней будет равна 6 или 8?	что сумма цифр на ней будет равна 3 или 4?

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ
выполнения практических заданий текущего контроля

- оценка «отлично». За глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся ориентируется, умеет приводить примеры.

- оценка «хорошо». Если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет содержанием учебного материала, умеет приводить примеры. Грамотно излагает ответ, по содержанию ответа, и в форме ответа имеются отдельные неточности.

- оценка «удовлетворительно». Если обучающийся обнаруживает знания и понимание положенного учебного материала, понятийного аппарата, но излагает их неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, не умеет доказательно обосновать свои суждения.

- оценка «неудовлетворительно». Если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, искажает их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал.

3. Промежуточная (семестровая) аттестация по курсу

3.1 Нормативная база проведения промежуточной аттестации обучающихся по результатам изучения дисциплины:	
1) «Положение о текущем контроле успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры и среднего профессионального образования в ФГБОУ ВО Омский ГАУ»	
Основные характеристики промежуточной аттестации обучающихся по итогам изучения дисциплины Для экзамена	
Цель промежуточной аттестации -	установление уровня достижения каждым обучающимся целей обучения по данной дисциплине
Форма промежуточной аттестации -	экзамен
Место экзамена в графике учебного процесса:	1) подготовка к экзамену осуществляется за счёт учебного времени (трудоёмкости), отведённого на экзаменационную сессию для обучающихся, сроки которой устанавливаются приказом по университету
	2) дата, время и место проведения экзамена определяется графиком сдачи экзаменов, утверждаемым заместителем директора Тарского филиала по образовательной и научной деятельности
Основные условия подготовки к экзамену	прохождение заключительного тестирования, по результатам освоения дисциплины
Форма проведения -	(Письменный, устный)
Процедура проведения экзамена -	представлена в фонде оценочных средств по дисциплине
Экзаменационная программа по учебной дисциплине:	1) представлена в фонде оценочных средств по дисциплине
Основные критерии достижения соответствующего уровня освоения программы учебной дисциплины, используемые на экзамене	представлены в п. 4 рабочей программы

3.2. Заключительное тестирование по итогам изучения дисциплины

По итогам изучения дисциплины, обучающиеся проходят заключительное тестирование. Тестирование является формой контроля, направленной на проверку владения терминологическим аппаратом, современными информационными технологиями и конкретными знаниями по дисциплине.

3.2.1 Подготовка к заключительному тестированию по итогам изучения дисциплины

Тестирование осуществляется по всем темам и разделам дисциплины, включая темы, выносимые на самостоятельное изучение.

Процедура тестирования ограничена во времени и предполагает максимальное сосредоточение обучающегося на выполнении теста, содержащего несколько тестовых заданий.

3.2.2 ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

ответов на тестовые вопросы тестирования по итогам освоения дисциплины

- оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если получено более 80% правильных ответов.
- оценка «хорошо» - получено от 71 до 80% правильных ответов.
- оценка «удовлетворительно» - получено от 60 до 70% правильных ответов.
- оценка «неудовлетворительно» - получено менее 60% правильных ответов.